

# DINAMICA DE VIGAS ROTANTES CONSTRUIDAS CON MATERIALES FUNCIONALES

Marcelo T. Piovan<sup>a</sup>, Sebastian Domini<sup>a,b</sup> and Carlos Mainetti<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca. 11 de Abril 461, B8000LMI Bahía Blanca, BA, Argentina, [mpiovan@frbb.utn.edu.ar](mailto:mpiovan@frbb.utn.edu.ar) <http://www.frbb.utn.edu.ar>*

<sup>b</sup>*Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca. 11 de Abril 461, B8000LMI Bahía Blanca, BA, Argentina, <http://www.frbb.utn.edu.ar>*

**Keywords:** Vigas rotantes, Materiales funcionales, Dinámica.

**Abstract.** Las actuales necesidades del muy competitivo mundo industrial empujan a la búsqueda de nuevos conceptos y nuevos modelos con el fin de mejorar la respuesta estructural como así también la resistencia de los materiales. Esto es particularmente verdadero en el caso de vigas rotantes curvadas que son sometidas a condiciones ambientales y mecánicas muy severas como por ejemplo altas temperaturas, grandes aceleraciones, fuerzas centrífugas, etc. Se sabe que las vigas flexibles se tornan más rígidas cuando están rotando a grandes velocidades debido al acoplamiento geométrico axial-flexional, entre otros. En este trabajo se desarrolla un modelo para vigas rotantes e inicialmente curvadas considerando deformabilidad por corte debido a flexión. La viga está construida con materiales funcionales, los cuales se pueden preparar de acuerdo a diversos planteos a partir de combinar metales y cerámicos. Se evalúan los casos de vibraciones transitorias y estacionarias asociadas a sollicitaciones centrífugas. También se analizan los movimientos fuera del plano y en el plano de la viga curvada. Se evalúan, a su vez aspectos relacionados con la conexión de la viga al núcleo rotante.

## 1 INTRODUCCION

Los componentes estructurales rotantes se pueden observar en un variado rango de aplicaciones ingenieriles como por ejemplo alabes de turbomaquinarias, brazos roboticos, actuadores industriales, entre otros. El comportamiento dinámico de estos componentes es bastante complejo, y muchas veces se recurre a modelos simples para preevaluar la respuesta de los mismos. El problema de caracterización de la dinámica de vigas rotantes ha recibido la atención de la comunidad científica, con diferentes grados de profundidad, durante los últimos cuarenta años. Algunas observaciones del contexto histórico y bibliográfico se pueden encontrar en los trabajos de [Rao \(1987\)](#) y [Lin et al. \(2006\)](#). En estos trabajos se pueden hallar citas a investigaciones que hicieron época y marcaron rumbo como también a las muy recientes aplicaciones en materiales compuestos laminados. Aunque la mayoría de las investigaciones sobre vigas rotantes se ha efectuado empleando modelos de vigas rectas o placas, son pocas las investigaciones que muestran interés en el estudio de vigas rotantes con eje curvado, como por ejemplo en los trabajos de [Park and Kim \(1999\)](#) y [Lee et al. \(2008\)](#); sin embargo en estos trabajos se efectuó el análisis dinámico del movimiento en el plano de curvatura además de emplear un conjunto de hipótesis que conducen a una linealización con ciertas limitaciones en determinadas circunstancias.

El formulación de modelos de vigas flexibles rotantes involucra el acoplamiento entre las deflexiones elásticas y las rotaciones, además se puede emplear el acoplamiento entre las componentes de deformación y los grandes desplazamientos. Existen varios artículos sobre vigas rotantes que consideran acoplamientos geométricos de índole no lineales. [Simo and Vu-Quoc \(1986, 1987\)](#) mostraron que el empleo apropiado de relaciones de desplazamiento y deformación no lineales juega un papel importante en la correcta modelación de la rigidización geométrica de las vigas flexibles. Es importante mencionar que la rigidización geométrica tiene un efecto no menor en la dinámica de vigas, sean éstas rotantes o no. Además en vigas rotantes la rigidización geométrica no se debe solamente a las relaciones entre desplazamientos y deformaciones sino también a los efectos inerciales centrífugos y de Coriolis. Ahora bien, teniendo en cuenta el contexto tecnológico, se debe destacar la escasez de información con respecto a estudios sobre vigas rotantes construidas con materiales de propiedades funcionalmente graduadas. En tal sentido y según el conocimiento de los autores, los trabajos de [Fazelzadeh and Hosseini \(2007\)](#) y [Fazelzadeh et al. \(2007\)](#) son los primeros que tratan el tema de vigas rectas rotantes construidas con los mencionados materiales. Sin embargo en tales trabajos se ha estudiado con mayor detenimiento los aspectos relacionados a los efectos termoelásticos asociados a las propiedades graduadas. [Piovan and Sampaio \(2009\)](#) desarrollaron un modelo de viga recta rotante construida con materiales funcionales que contempla acoplamiento geométrico.

En las siguientes secciones se desarrollará un modelo de viga curva rotante construida con materiales funcionales recurriendo a una formulación linealizada consistente. El modelo se deduce empleando una formulación variacional convencional. Se adopta un campo de desplazamiento que contempla la deformabilidad por corte. A partir de las ecuaciones de movimiento se desarrolla un elemento finito isoparamétrico de eje curvo con el cual se efectúan los estudios numéricos. El modelo de viga curva puede ser reducido al caso de viga recta además de contemplar diferentes casos de variabilidad de las propiedades del material, lo que también incluye a los casos de materiales isotropos. Se efectúan comparaciones con otros modelos disponibles en la literatura abierta internacional. A su vez se efectúan diversos análisis paramétricos considerando diferentes configuraciones geométricas, ángulos de abertura, velocidades de rotación y diversas configuraciones de gradación de las propiedades materiales.

## 2 DESARROLLO DEL MODELO

La Fig. 1(a) muestra el modelo de la viga curva mientras que en la Fig. 1(b) se puede observar la idealización de la estructura como también los sistemas de referencia y coordenadas empleados. Se emplean tres sistemas de coordenadas, a saber:  $\{O : X_G, Y_G, Z_G\}$  es el sistema global,  $\{O : X_L, Y_L, Z_L\}$  es el sistema rotante y  $\{C : xyz\}$  es el sistema de referencia local de la viga curva que es ubicado en el centro geométrico de la sección transversal. Si bien la figura presentada posee una sección transversal específica, el modelo que se desarrolla a continuación contempla completa generalidad de la sección.

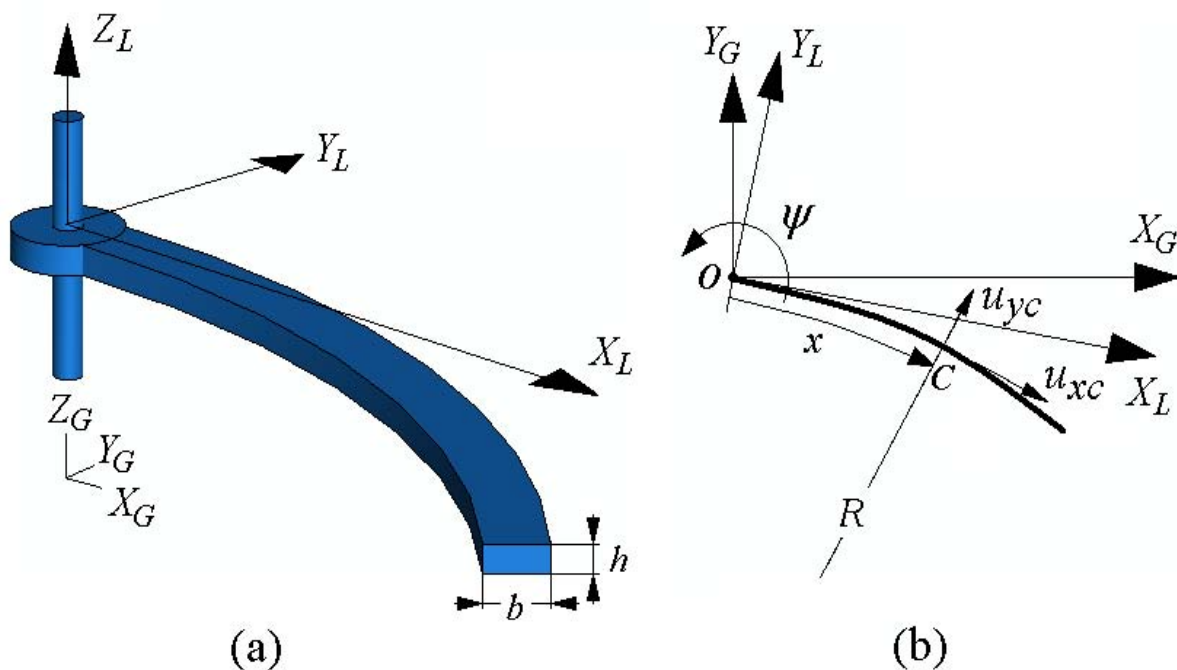


Figure 1: (a) Descripción de la estructura, (b) Diagrama de los sistemas de referencia.

Para el desarrollo del modelo se establecen las siguientes restricciones:

- 1 La viga solamente tiene movimiento de rotación alrededor del eje  $Z_G$  con movimiento de velocidad constante prescrita, es decir con  $\dot{\psi}(t)$  definido.
- 2 Se incluye la deformabilidad por corte
- 3 Se acepta que las propiedades materiales poseen graduación funcional arbitraria en las direcciones de la sección trasversal (es decir en el plano  $yz$ ).
- 4 Se consideran los movimientos en el plano y fuera del plano de curvatura.
- 5 No se desprecia el efecto inercial del núcleo donde se monta la viga.
- 6 La conexión de la raíz de la viga al núcleo se supone montada elásticamente.
- 7 Para contemplar los efectos de rigidización de una forma simplificada se recurre a una linealización del principio de trabajos virtuales desde una configuración inicial.

## 2.1 Formulaci3n variacional

El principio de trabajos virtuales linealizado a partir de una configuraci3n inicial se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_T = & \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^L dV + \int_V \sigma_{ij}^0 \delta \varepsilon_{ij}^{NL} dV - \int_S \bar{T}_i \delta u_i^{NL} dS - \int_V \bar{X}_i^0 \delta u_i^{NL} dV - \\ & - \int_V (\bar{X}_i) \delta u_i^L dV - \int_S \bar{T}_i \delta u_i^L dS + \int_V (\rho \ddot{u}_i^L) \delta u_i^L dV = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathcal{W}_T^0 = \int_V \sigma_{ij}^0 \delta \varepsilon_{ij}^L dV - \int_V \bar{X}_i^0 \delta u_i dV - \int_S \bar{T}_i^0 \delta u_i dS = 0, \quad (2)$$

siendo  $\sigma_{ij}$  el estado de tensiones incrementales,  $\sigma_{ij}^0$  el estado de tensiones iniciales,  $\bar{X}_i^0$  las fuerzas volum3tricas iniciales,  $\bar{X}_i$  las fuerzas volum3tricas incrementales,  $\bar{T}_i^0$ , son las fuerzas superficiales iniciales,  $\bar{T}_i$  son las fuerzas superficiales incrementales,  $\varepsilon_{ij}^L$  son las componentes lineales de deformaci3n,  $\varepsilon_{ij}^{NL}$  son las componentes no lineales de deformaci3n,  $u_i^L$  son las componentes lineales del campo de desplazamiento,  $u_i^{NL}$  son las componentes de segundo orden del campo de desplazamiento,  $\rho$  es la densidad material,  $\ddot{u}_i^L$  representa la aceleraci3n de un punto, mientras que  $\delta$  identifica el operador variacional.

El campo de desplazamientos recurriendo a las hip3tesis planteadas puede escribirse de la siguiente manera (Piovan and Cort3nez, 2007):

$$\begin{Bmatrix} u_x^L \\ u_y^L \\ u_z^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{xc} - \omega \Phi_W \\ u_{yc} \\ u_{zc} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Phi_3 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & 0 & -\Phi_1 \\ -\Phi_2 & \Phi_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} u_x^{NL} \\ u_y^{NL} \\ u_z^{NL} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Phi_3^2 - \Phi_2^2 & \Phi_1 \Phi_2 & \Phi_1 \Phi_3 \\ \Phi_1 \Phi_2 & -\Phi_1^2 - \Phi_3^2 & \Phi_2 \Phi_3 \\ \Phi_1 \Phi_3 & \Phi_2 \Phi_3 & -\Phi_1^2 - \Phi_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

donde,  $\omega$  representa la funci3n de alabeo de la viga,  $\Phi_W$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  and  $\Phi_3$  se definen en t3rminos de los siguientes par3metros rotacionales y de alabeo:

$$\Phi_1 = \phi_x, \quad \Phi_2 = \theta_y, \quad \Phi_3 = \theta_z - \frac{u_{xc}}{R}, \quad \Phi_W = \theta_x + \frac{\theta_y}{R} \quad (5)$$

En las anteriores ecuaciones,  $u_{xc}$ ,  $u_{yc}$ ,  $u_{zc}$  representan los desplazamientos del centro de referencia;  $\phi_x$  es el 3ngulo de torsi3n;  $\theta_y$  y  $\theta_z$  son los par3metros de rotaci3n para flexi3n, y finalmente  $\theta_x$  representa una medida de la intensidad de alabeo a lo largo de la viga.

Siguiendo las hip3tesis las componentes de deformaci3n que se consideraran vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_{xx}^L = \left( \frac{\partial u_x^L}{\partial x} + \frac{u_y^L}{R} \right) \mathcal{F}, \quad 2\varepsilon_{xy}^L = \left( \frac{\partial u_y^L}{\partial x} - \frac{u_x^L}{R} \right) \mathcal{F} + \frac{\partial u_x^L}{\partial y}, \quad 2\varepsilon_{xz}^L = \frac{\partial u_z^L}{\partial x} \mathcal{F} + \frac{\partial u_x^L}{\partial z}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{xx}^{NL} = \left( \frac{\partial u_x^{NL}}{\partial x} + \frac{u_y^{NL}}{R} \right) \mathcal{F} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x^L}{\partial x} + \frac{u_y^L}{R} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y^L}{\partial x} - \frac{u_x^L}{R} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z^L}{\partial x} \right)^2 \right] \mathcal{F}^2, \quad (7)$$

En las ecuaciones anteriores,  $\mathcal{F}$  se define como:

$$\mathcal{F} = \frac{R}{R + y} \quad (8)$$

substituyendo las Eqs. (3)-(4) en las Eqs. (6)-(7) y despreciando los términos de orden superior se puede llegar a:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^L &= [\varepsilon_{D1} + z\varepsilon_{D2} - y\varepsilon_{D3} - \omega\varepsilon_{D4}] \mathcal{F}, \\ 2\varepsilon_{xy}^L &= \left[ \varepsilon_{D5} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \varepsilon_{D7} - \left( z + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) \varepsilon_{D8} \right] \mathcal{F}, \\ 2\varepsilon_{xz}^L &= \left[ \varepsilon_{D6} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \varepsilon_{D7} + \left( y - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \right) \varepsilon_{D8} \right] \mathcal{F}, \\ \varepsilon_{xx}^{NL} &= \frac{\mathcal{F}^2}{2} \left[ \left( u'_{xc} + \frac{u_{yc}}{R} \right)^2 + \left( u'_{yc} - \frac{u_{xc}}{R} \right)^2 + (u'_{zc})^2 \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

En la Ec. (9) se han introducido las siguientes definiciones de componentes de deformación:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D1} &= u'_{xc} + \frac{u_{yc}}{R}, \varepsilon_{D2} = \theta'_y - \frac{\phi_x}{R}, \varepsilon_{D3} = \theta'_z - \frac{u'_{xc}}{R}, \varepsilon_{D4} = \theta'_x + \frac{\theta'_y}{R}, \\ \varepsilon_{D5} &= u'_{yc} - \theta_z, \varepsilon_{D6} = u'_{zc} + \theta_y, \varepsilon_{D7} = \phi'_x - \theta_x, \varepsilon_{D8} = \phi'_x + \frac{\theta_y}{R}, \end{aligned} \quad (10)$$

Además  $\omega$  y  $\bar{\omega}$  identifican a la función de alabeo para la viga curva y de la viga recta que están relacionadas de la siguiente manera (Yang and Kuo, 1987):

$$\omega = \bar{\omega} \mathcal{F}, \quad (11)$$

La función de alabeo de viga recta  $\bar{\omega}$  se puede calcular recurriendo a metodología de Lekhnitskii (1981).

La aceleración de un punto medida desde el sistema de referencia local  $\{\mathbf{C} : xyz\}$  se obtiene de la siguiente manera (Piovan and Sampaio, 2009; Park and Kim, 1999):

$$\begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x^L - 2\dot{\psi}\dot{u}_y^L - \dot{\psi}^2 (u_x^L + R_0 \cos[x/R] + R \sin[x/R]) \\ \ddot{u}_y^L + 2\dot{\psi}\dot{u}_x^L - \dot{\psi}^2 (u_y^L + (R + y) - R \cos[x/R] + R_0 \sin[x/R]) \\ \ddot{u}_z^L \end{Bmatrix} \quad (12)$$

siendo  $R_0$  el radio del núcleo rotante.

Ahora bien, substituyendo las Ecs. (3)-(4) y Ecs. (9)-(10) en la Ec. (1) se puede obtener la siguiente expresión del principio de trabajos virtuales:

$$\delta \mathcal{T}_U + \delta \mathcal{T}_K = 0 \quad (13)$$

donde  $\delta \mathcal{T}_U$  y  $\delta \mathcal{T}_G$  son el trabajo virtual de las fuerzas internas incrementales e iniciales (considerando los efectos centrífugos y/u otros estados iniciales) y el trabajo virtual de las fuerzas

inerciales. Estos trabajos virtuales vienen dados por:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{T}_U = & \int_L [Q_x \delta \varepsilon_{D1} + M_y \delta \varepsilon_{D2} + M_z \delta \varepsilon_{D3} + B \delta \varepsilon_{D4}] dx + \\ & \int_L [Q_y \delta \varepsilon_{D5} + Q_z \delta \varepsilon_{D6} + T_w \delta \varepsilon_{D7} + T_{sv} \delta \varepsilon_{D8}] dx + \\ & \delta \int_L \frac{Q_x^0}{2} \left[ \left( u'_{xc} + \frac{u_{yc}}{R} \right)^2 + (u'_{zc})^2 + \left( u'_{yc} - \frac{u_{xc}}{R} \right)^2 \right] dx + \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & |\mathcal{K}_1 u_{xc} \delta u_{xc} + \mathcal{K}_2 u_{yc} \delta u_{yc} + \mathcal{K}_3 \theta_z \delta \theta_z|_{x=0} + \\ & |\mathcal{K}_4 u_{zc} \delta u_{zc} + \mathcal{K}_5 \theta_y \delta \theta_y + \mathcal{K}_6 \phi_x \delta \phi_x + \mathcal{K}_7 \theta_x \delta \theta_x|_{x=0} \\ \delta \mathcal{T}_K = & \int_L [\mathcal{M}_1 \delta u_{xc} + \mathcal{M}_2 \delta u_{yc} + \mathcal{M}_3 \delta \theta_z] dx + \\ & \int_L [\mathcal{M}_4 \delta u_{zc} + \mathcal{M}_5 \delta \theta_y + \mathcal{M}_6 \delta \phi_x + \mathcal{M}_7 \delta \theta_x] dx \end{aligned} \quad (15)$$

$Q_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $B$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $T_w$ , y  $T_{sv}$  son la fuerza axial, los momentos flectores en las direcciones  $y$  y  $z$ , el bimomento, las fuerzas de corte en las direcciones  $y$  y  $z$ , el momento de flexo-torsión y el momento de torsión pura, respectivamente. Estas fuerzas vienen definidas de la siguiente forma en función de las tensiones:

$$\begin{aligned} \{Q_x, M_y, M_z, B\} &= \int_A \sigma_{xx} \{1, z, -y, -\omega\} dydz, \\ \{Q_y, Q_z\} &= \int_A \{\sigma_{xy}, \sigma_{xz}\} dydz, \\ T_w &= \int_A \left( \sigma_{xy} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} + \sigma_{xz} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \right) dydz, \\ T_{sv} &= \int_A \left[ -\sigma_{xy} \left( z + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) + \sigma_{xz} \left( y - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \right) \right] dydz. \end{aligned} \quad (16)$$

Las  $\mathcal{K}_j$ ,  $j = 1, \dots, 7$ , son constantes de resorte que modelan la vinculación de la viga al núcleo de radio  $R_0$ , en tanto que las funciones  $\mathcal{M}_j$ ,  $j = 1, \dots, 7$ , son funciones de las fuerzas inerciales y de Coriolis.  $Q_x^0$  identifica la fuerza axial inicial asociada a los efectos inerciales centrífugos. Esta fuerza no es otra cosa más que la proyección de la fuerza centrífuga sobre el eje  $x$  del sistema de referencia local  $\{\mathbf{C} : xyz\}$  y se obtiene a partir de la Ec. (2) como:

$$\int_L \left[ Q_x^0 \delta \varepsilon_{D1} + M_z^0 \delta \varepsilon_{D3} + Q_y^0 \delta \varepsilon_{D5} - J_{11}^p \dot{\psi}^2 (F_x \delta u_{xc} + F_y \delta u_{yc}) \right] dx = 0 \quad (17)$$

siendo  $F_x$  y  $F_y$  definidas por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} F_x &= R_0 \cos[x/R] + R \sin[x/R] \\ F_y &= R - R \cos[x/R] + R_0 \sin[x/R] \end{aligned} \quad (18)$$

Resolviendo la Ec. (17) se puede hallar  $Q_x^0$ ,  $Q_y^0$  y  $M_z^0$ . Sin embargo, se recordará que por simplicidad solo se empleará  $Q_x^0$  siguiendo la hipótesis de Lee et al. (2008).

Las fuerzas inerciales  $\mathcal{M}_j$ ,  $j = 1, \dots, 7$ , de la Ec. (15) se definen de acuerdo con la siguiente forma compacta:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{M}_0 \ddot{\bar{\mathbf{U}}} + \dot{\psi} \mathbf{G} \dot{\bar{\mathbf{U}}} - \dot{\psi}^2 \mathbf{M}_1 \bar{\mathbf{U}} + \dot{\psi}^2 \bar{\mathbf{F}} \quad (19)$$

Siendo

$$\bar{\mathbf{C}} = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_4, \mathcal{M}_5, \mathcal{M}_6, \mathcal{M}_7\}^T, \quad \bar{\mathbf{U}} = \{u_{xc}, u_{yc}, \theta_z, u_{zc}, \theta_y, \phi_x, \theta_x\}^T \quad (20)$$

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & I_{13} & 0 & I_{15} & 0 & I_{17} \\ & I_{22} & 0 & 0 & 0 & I_{26} & 0 \\ & & I_{33} & 0 & I_{35} & 0 & I_{37} \\ & & & I_{44} & 0 & I_{46} & 0 \\ & & & & I_{55} & 0 & I_{57} \\ & & & & & I_{66} & 0 \\ & & & & & & I_{77} \end{bmatrix} \quad (21)$$

*sym*

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & I_{13} & 0 & I_{15} & 0 & I_{17} \\ & I_{22} & 0 & 0 & 0 & I_{26} & 0 \\ & & I_{33} & 0 & I_{35} & 0 & I_{37} \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & I_{55} & 0 & I_{57} \\ & & & & & J_{22}^\rho & 0 \\ & & & & & & I_{77} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} -F_x \left( J_{11}^\rho - \frac{J_{13}^\rho}{R} \right) \\ -F_y J_{11}^\rho \\ -F_x J_{13}^\rho \\ 0 \\ -F_x \left( J_{12}^\rho + \frac{J_{14}^\rho}{R} \right) \\ F_y J_{12}^\rho \\ -F_x J_{14}^\rho \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{G} = 2 \begin{bmatrix} 0 & -2J_{11}^\rho + \frac{J_{13}^\rho}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{12}^\rho - \frac{J_{23}^\rho}{R} & 0 \\ J_{11}^\rho - \frac{J_{13}^\rho}{R} & 0 & J_{13}^\rho & 0 & J_{12}^\rho + \frac{J_{14}^\rho}{R} & 0 & 0 & J_{14}^\rho \\ 0 & -J_{13}^\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{23}^\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_{12}^\rho - \frac{J_{14}^\rho}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{22}^\rho + \frac{J_{24}^\rho}{R} & 0 \\ -J_{12}^\rho + \frac{J_{23}^\rho}{R} & 0 & -J_{23}^\rho & 0 & -J_{22}^\rho - \frac{J_{24}^\rho}{R} & 0 & 0 & -J_{24}^\rho \\ 0 & -J_{14}^\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{24}^\rho & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Los coeficientes  $I_{ik}$ ,  $i, k = 1, \dots, 7$  se definen como:

$$\begin{aligned} I_{11} &= J_{11}^\rho - \frac{2J_{13}^\rho}{R} + \frac{J_{33}^\rho}{R^2}, & I_{13} &= J_{13}^\rho - \frac{J_{33}^\rho}{R}, & I_{15} &= J_{12}^\rho + \frac{J_{14}^\rho}{R} - \frac{J_{23}^\rho}{R} - \frac{J_{34}^\rho}{R^2}, \\ I_{17} &= J_{14}^\rho - \frac{J_{34}^\rho}{R}, & I_{22} &= I_{44} = J_{11}^\rho, & I_{26} &= -J_{12}^\rho, & I_{33} &= J_{33}^\rho, \\ I_{35} &= J_{23}^\rho + \frac{J_{34}^\rho}{R}, & I_{37} &= J_{34}^\rho, & I_{46} &= -J_{13}^\rho, & I_{55} &= J_{22}^\rho + \frac{2J_{24}^\rho}{R} + \frac{J_{44}^\rho}{R^2}, \\ I_{57} &= J_{24}^\rho + \frac{J_{44}^\rho}{R}, & I_{66} &= J_{22}^\rho + J_{33}^\rho, & I_{77} &= J_{44}^\rho. \end{aligned} \quad (24)$$

En tanto que los  $J_{ik}^\rho$ ,  $i, k = 1, \dots, 4$  vienen definidos como:

$$J_{ik}^\rho = \int_A \rho \bar{\mathbf{g}}_i^a \bar{\mathbf{g}}_k^a \frac{dydz}{\mathcal{F}}, \quad \bar{\mathbf{g}}^a = \{1, z, -y, -\omega\}. \quad (25)$$

## 2.2 Ecuaciones constitutivas

En un material funcional se puede construir de tal manera que las propiedades elásticas y másicas varien de acuerdo con cierta función prescrita por el diseñador. En este trabajo se considerará una distribución arbitraria de las propiedades elásticas -básicamente el módulo de elasticidad longitudinal  $E_{xx}(y, z)$  y los módulos de elasticidad transversales  $G_{xy}(y, z)$  y  $G_{xz}(y, z)$ - como también de las propiedades másicas -básicamente la densidad  $\rho(y, z)$ -. Las leyes de variación de tales propiedades pueden seguir una ley de potencias o una ley exponencial, pudiendo variar, a su vez, en forma continua desde un constituyente metálico a otro cerámico o bien en forma laminada con diversas proporciones de los constituyentes (metal-metal o metal-cerámico, etc.). En forma genérica las relaciones de tensión y deformación se pueden escribir de la siguiente forma (Malekzadeh et al., 2010):

$$\sigma_{xx} = E_{xx}(y, z) \varepsilon_{xx}^L, \quad \sigma_{xy} = G_{xy}(y, z) 2\varepsilon_{xy}^L, \quad \sigma_{xz} = G_{xz}(y, z) 2\varepsilon_{xz}^L, \quad (26)$$

siendo,  $E_{xx}(y, z)$  el módulo de elasticidad longitudinal, en tanto que  $G_{xy}(y, z)$  y  $G_{xz}(y, z)$  son los módulos de elasticidad transversal. Para poder contemplar mejor el efecto de la distribución de tensiones tangenciales en la dinámica de una viga,  $G_{xy}(y, z)$  y  $G_{xz}(y, z)$  se pueden modificar multiplicándolos por sendos coeficientes de corte ( $\kappa_{xy}$ ,  $\kappa_{xz}$ ) tal como se hace en la teoría clásica de viga Timoshenko o en otros modelos de vigas basados en la hipótesis de cortante de primer orden (Malekzadeh et al., 2010).

Ahora bien, substituyendo la Ec. (10) en la Ec. (26) y luego en la Ec. (16) se obtienen las fuerzas en función de las deformaciones generalizadas, lo cual se puede escribir en la siguiente forma compacta:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{J} \bar{\mathbf{D}} \quad (27)$$

siendo:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \{Q_x, M_y, M_z, B, Q_y, Q_z, T_w, T_{sv}\}^T, \quad (28)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \{\varepsilon_{D1}, \varepsilon_{D2}, \varepsilon_{D3}, \varepsilon_{D4}, \varepsilon_{D5}, \varepsilon_{D6}, \varepsilon_{D7}, \varepsilon_{D8}\}^T,$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{12} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} & J_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_{14} & J_{24} & J_{34} & J_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{55} & J_{56} & J_{57} & J_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{56} & J_{66} & J_{67} & J_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{57} & J_{67} & J_{77} & J_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{58} & J_{68} & J_{78} & J_{88} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$J_{ik} = \int_A E_{xx} \bar{\mathbf{g}}_i^a \bar{\mathbf{g}}_k^a \mathcal{F} dydz, \quad \{i, k\} = 1, 2, 3, 4$$

$$J_{hl} = \int_A [G_{xy} \bar{\mathbf{g}}_h^b \bar{\mathbf{g}}_l^b + G_{xz} \bar{\mathbf{g}}_h^c \bar{\mathbf{g}}_l^c] \mathcal{F} dydz, \quad h, l = 5, 6, 7, 8 \quad (30)$$



$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{g}}^a &= \{1, z, -y, -\omega\}, \\
\bar{\mathbf{g}}^b &= \left\{ 1, 0, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}, -z - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right\}, \\
\bar{\mathbf{g}}^c &= \left\{ 0, 1, \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z}, y - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \right\}.
\end{aligned} \tag{31}$$

### 2.3 Ecuaciones de movimiento

Empleando las técnicas convencionales del cálculo de variaciones en la Ec. (13) se puede escribir las ecuaciones diferenciales de movimiento en la siguiente forma compacta:

$$\mathbf{K}_2 \bar{\mathbf{U}}'' + \mathbf{K}_1 \bar{\mathbf{U}}' + \mathbf{K}_0 \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{M}_0 \ddot{\bar{\mathbf{U}}} + \dot{\psi} \mathbf{G} \dot{\bar{\mathbf{U}}} - \dot{\psi}^2 \mathbf{M}_1 \bar{\mathbf{U}} + \dot{\psi}^2 \bar{\mathbf{F}} = 0 \tag{32}$$

donde  $\mathbf{M}_0$ ,  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\bar{\mathbf{F}}$  y  $\bar{\mathbf{U}}$  son los definidos en las Ecs. (20) a (23). Se recordará, los puntos y los apóstrofes significan derivación con respecto a la variable temporal y espacial en  $x$ , respectivamente. En tanto que las matrices  $\mathbf{K}_2$ ,  $\mathbf{K}_1$  y  $\mathbf{K}_0$  vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_2 &= -\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1^T + \mathbf{A}_3, \\
\mathbf{K}_1 &= -\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_2^T + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1^T + \mathbf{A}_4, \\
\mathbf{K}_0 &= \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_2^T + \mathbf{A}_5,
\end{aligned} \tag{33}$$

siendo:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{34}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/R \\ 0 & -1/R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{35}$$

$$\mathbf{A}_3 = - \begin{bmatrix} Q_x^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_x^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_x^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{36}$$

$$\mathbf{A}_4 = - \begin{bmatrix} (Q_x^0)' & 2Q_x^0/R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2Q_x^0/R & (Q_x^0)' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (Q_x^0)' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} Q_x^0/R^2 & -(Q_x^0)'/R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(Q_x^0)'/R & Q_x^0/R^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

Las condiciones de borde correspondientes a las ecuaciones diferenciales de movimiento dadas por la Ec. (32) son las siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_x + Q_x^0 (u'_{xc} + u_{yc}/R) - \mathcal{K}_1 u_{xc} \\ Q_y + Q_x^0 (u'_{yc} - u_{xc}/R) - \mathcal{K}_2 u_{yc} \\ M_z - \mathcal{K}_3 \theta_z \\ Q_z + Q_x^0 u'_{zc} - \mathcal{K}_4 u_{zc} \\ M_y - \mathcal{K}_5 \theta_y \\ M_x - \mathcal{K}_6 \phi_x \\ B - \mathcal{K}_7 \theta_x \end{array} \right\}_{x=0} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} Q_x \\ Q_y \\ M_z \\ Q_z \\ M_y \\ M_x \\ B \end{array} \right\}_{x=L} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}. \quad (39)$$

Las condiciones de borde en el extremo empotrado (es decir en  $x = 0$ ) claramente se pueden reducir a las convencionales de anulación de desplazamientos y/o variables asociadas en tanto que se verifique la condición de empotramiento perfecto, lo que implica  $\mathcal{K}_j \rightarrow \infty$ ,  $j = 1, \dots, 7$ .

## 2.4 Cálculo de las fuerzas internas iniciales

Las fuerzas internas iniciales se pueden calcular a partir de la solución de las ecuaciones diferenciales deducidas de la Ec. (17). En efecto, tal procedimiento da:

$$\begin{aligned} Q_x^0 &= J_{11}^p \dot{\psi}^2 R \left[ (L-x) \left( \sin \left[ \frac{x}{R} \right] + \frac{R_0}{R} \cos \left[ \frac{x}{R} \right] \right) + R \left( 1 - \cos \left[ \frac{L-x}{R} \right] \right) \right] + \\ Q_y^0 &= J_{11}^p \dot{\psi}^2 R \left[ -(L-x) \left( \cos \left[ \frac{x}{R} \right] + \frac{R_0}{R} \sin \left[ \frac{x}{R} \right] \right) + R \sin \left[ \frac{L-x}{R} \right] \right] + \\ M_z^0 &= J_{11}^p \dot{\psi}^2 R \left[ (L-x) \left( R_0 \cos \left[ \frac{x}{R} \right] + R \sin \left[ \frac{x}{R} \right] \right) + R^2 \left( 1 - \cos \left[ \frac{L-x}{R} \right] \right) \right] + \\ & J_{11}^p \dot{\psi}^2 R^2 \left[ R \left( \cos \left[ \frac{L}{R} \right] - \cos \left[ \frac{x}{R} \right] \right) - R_0 \left( \sin \left[ \frac{L}{R} \right] - \sin \left[ \frac{x}{R} \right] \right) \right] \end{aligned} \quad (40)$$

La fuerza inicial  $Q_x^0$  es la que se empleará en los siguientes cálculos. Las restantes se no se consideran siguiendo el criterio establecido por [Park and Kim \(1999\)](#) y [Lee et al. \(2008\)](#).

## 2.5 Desarrollo del modelo de elementos finitos

Para efectuar el estudio numérico se desarrolla un elemento finito iso-paramétrico de cinco nodos, lo cual implica una aproximación de orden cuártico. El vector de desplazamientos nodales  $\bar{\mathbf{U}}_e$  se puede representar de la siguiente manera:

$$\bar{\mathbf{U}}_e = \left\{ \bar{\mathbf{U}}_e^{(1)}, \dots, \bar{\mathbf{U}}_e^{(5)} \right\} \quad (41)$$

siendo:

$$\bar{\mathbf{U}}_e^{(j)} = \{ u_{xcj}, u_{ycj}, \theta_{zj}, u_{zcj}, \theta_{yj}, \phi_{xj}, \theta_{xj} \}, \quad j = 1, \dots, 5 \quad (42)$$

De manera que las variables  $u_{xc}$ ,  $u_{yc}$ ,  $\theta_z$ ,  $u_{zc}$ ,  $\theta_y$ ,  $\phi_x$  y  $\theta_x$  se pueden interpolar a lo largo del elemento empleando la siguiente forma compacta:

$$U_i = \sum_{j=1}^5 f_j^{(5)} \bar{\mathbf{U}}_{ei}^{(j)}, \quad j = 1, \dots, 5, \quad i = 1, \dots, 7 \quad (43)$$

donde  $f_j^{(5)}$  es la función de forma del  $j$ -ésimo nodo del elemento, en tanto que  $\bar{\mathbf{U}}_{ei}^{(j)}$  es el  $i$ -ésimo desplazamiento nodal en el  $j$ -ésimo nodo. Las funciones de forma iso-paramétricas  $f_j^{(5)}$ ,  $j = 1, \dots, 5$ , se pueden hallar en cualquier texto sobre teoría del método de elementos finitos (Bathe, 1982). Es claro que  $U_1 = u_{xc}$ ,  $U_2 = u_{yc}$ ,  $U_3 = \theta_z$ ,  $U_4 = u_{zc}$ ,  $U_5 = \theta_y$ ,  $U_6 = \phi_x$  y  $U_7 = \theta_x$ .

Ahora bien, reemplazando la Ec. (41) en la Ec. (13) y efectuando los pasos convencionales del desarrollo matricial del método de elementos finitos, se llega a la siguiente expresión:

$$\left( \mathbb{K} + \mathbb{K}_G - \dot{\psi}^2 \mathbb{M}_G \right) \bar{\mathbb{W}} + \mathbb{M} \ddot{\bar{\mathbb{W}}} + \dot{\psi} \mathbb{G} \dot{\bar{\mathbb{W}}} = \bar{\mathbb{F}} \quad (44)$$

en la cual  $\mathbb{K}$  es la matriz global de rigidez elástica,  $\mathbb{K}_G$  es la matriz global de rigidez geométrica (asociada a la presencia de tensiones iniciales debidas a los efectos inerciales centrífugos),  $\mathbb{M}_G$  es la matriz global de efectos inerciales de rigidización,  $\mathbb{M}$  es la matriz global de masa,  $\mathbb{G}$  es la matriz global de efectos giroscópicos,  $\bar{\mathbb{F}}$  es el vector global de fuerzas nodales (asociadas a los efectos inerciales) y  $\bar{\mathbb{W}}$  es el vector global de desplazamientos nodales.

## 2.6 Vibraciones libres: Solución simplificada

Los desplazamientos de la viga rotante contienen componentes estacionarias (también llamadas estáticas por Lee et al. (2008)) y dinámicas, de tal manera que el sistema representado en la Ec. (44) se puede separar en dos subsistemas, es decir, un sistema estático y otro dinámico. La ecuación gobernante del subsistema dinámico cuando se supone movimiento armónico y se supone despreciable el efecto giroscópico (ver Lee et al. (2008); Park and Kim (1999)) se reduce a:

$$\left( \mathbb{K} + \mathbb{K}_G - \dot{\psi}^2 \mathbb{M}_G - \Omega^2 \mathbb{M} \right) \bar{\mathbb{W}} = \bar{\mathbb{O}} \quad (45)$$

siendo  $\Omega$  la frecuencia circular del movimiento armónico.

Resolviendo el problema de autovalores dado en la Ec. (45) se pueden obtener las frecuencias naturales para vigas que están rotando a velocidades relativamente bajas (Lee et al., 2008).

### 3 ESTUDIOS NUMERICOS

En la Tab. 1 se identifican las propiedades de materiales metálicos (aluminio) como cerámicos (carburo de silicio *SiC*) a ser empleados en las siguientes secciones. En los casos que no se tenga completa información, se emplearán las hipótesis de proporcionalidad entre los módulos de elasticidad longitudinal y transversal para calcular las propiedades restantes, tal como se sugiere en varios trabajos recientes de la literatura técnica internacional (Chakraborty et al., 2003; Filipich and Piovan, 2010; Kapuria et al., 2008).

Propiedades	Aluminio	Carburo de Silicio
Módulo de elasticidad longitudinal ( <i>GPa</i> )	67	302
Módulo de elasticidad transversal ( <i>GPa</i> )	—	—
Coefficiente de Poisson	0.33	0.17
Densidad ( <i>Kg/m<sup>3</sup></i> )	2700	3200

Table 1: Propiedades de los componentes metálicos y ceramicos.

#### 3.1 Comparaciones con otros modelos

El primer ejemplo se trata de una comparación del presente modelo con otros enfoques de viga curva (Malekzadeh et al., 2010; Tufekci and Yasar Dogruer, 2006). En efecto, se trata de una viga curva isótropa no rotante con igual espesor y ancho ( $b = h$ ), tal que el coeficiente de Poisson es  $\mu = 0.3$  y la rigidez por corte se ve afectada por un coeficiente de corrección cuyo valor es  $k_s = 0.89$ . En tanto que las características geométricas de la viga curva son tales que  $R/h\sqrt{12} = 20$  (Tufekci and Yasar Dogruer, 2006). En la comparación del modelo se emplea la siguiente definición del parámetro adimensional de frecuencia:

$$\bar{\Omega}_i = \Omega_i R^2 \sqrt{\frac{I_{44}}{J_{22}}}, i = 1, 2, 3. \quad (46)$$

Angulo	Enfoque	$\bar{\Omega}_1$	$\bar{\Omega}_2$	$\bar{\Omega}_3$
60	Tufekci (2006)	16.885	39.700	40.934
	presente modelo	16.746	40.132	40.533
120	Tufekci (2006)	4.309	11.795	22.510
	presente modelo	4.287	11.702	22.337
180	Tufekci (2006)	1.791	5.032	10.232
	presente modelo	1.786	4.999	10.154

Table 2: Comparación de los primeros tres parámetros adimensionales de frecuencia.

En la Tab. 2 se muestran los primeros tres parámetros de frecuencia adimensionales para el movimiento fuera del plano en el caso de empotramiento doble. Como se puede observar ambos enfoques arrojan resultados similares, evidenciándose diferencias porcentuales no mayores a 0.9% en los casos analizados.

### 3.2 Estudios paramétricos

Los estudios paramétricos que se presentan en este apartado están todos vinculados al parámetro de frecuencia definido en la Ec (48) y a la siguiente ley de variación de material:

$$p_{fgm} = \sqrt{p_m p_c} \left( \frac{p_c}{p_m} \right)^{z/h} \quad (47)$$

donde  $p_{fgm}$ ,  $p_m$  y  $p_c$  identifican una propiedad genérica (módulo de elasticidad longitudinal, densidad, etc.) del material funcional, de la capa metálica (en  $z = -h/2$ ) y de la capa cerámica (en  $z = h/2$ ).

Así pues en la Tab. 3 se muestran los primeros tres parámetros de frecuencia variando con respecto al ángulo de abertura de una viga curva no rotante. Se trata de una viga curva tal que  $R/h\sqrt{12} = 200$ , con  $h = b$ , en la cual se han empleado factores de corrección por corte de  $5/6$  para modificar las constantes de rigidez por cortante.

Angulo	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
30	11.8176	24.8124	71.0208
60	3.0343	6.32434	16.6709
90	1.40647	2.89154	6.76411
120	0.836795	1.69138	3.44906

Table 3: Primeros tres parámetros adimensionales de frecuencia para una viga curva de material funcional.

En la Fig. 2 se muestra la variación de los tres primeros parámetros de frecuencia con el parámetro de velocidad de rotación  $\bar{\Lambda}$ . En este caso se emplea la misma relación de propiedades geométrica que en el ejemplo anterior y además se establece que el radio del núcleo es tal que  $5R_0 = R$  y el ángulo de abertura es de  $30^\circ$ . El parámetro de velocidad de rotación  $\bar{\Lambda}$  viene definido de la siguiente forma:

$$\bar{\Lambda} = \dot{\psi} R^2 \sqrt{\frac{I_{44}}{J_{22}}}, i = 1, 2, 3. \quad (48)$$

La Fig. 2 muestra un incremento de la primera y tercera frecuencias críticas en la medida que aumenta la velocidad de rotación. La primera y tercera frecuencias corresponden a modos fuera del plano, en tanto la segunda frecuencia crítica corresponde al movimiento dentro del plano. Nótese que los modos fuera del plano son más sensibles con la variación de la velocidad de rotación.

## 4 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado un modelo para analizar la dinámica de vigas curvadas rotantes construidas con materiales funcionales. El modelo se desarrolló empleando un enfoque linealizado del principio de trabajos virtuales. El modelo permite el estudio de los patrones de vibración en el plano y fuera del plano de vigas curvas construidas con materiales cuyas propiedades varían funcionalmente. El modelo permite reproducir los resultados de otros modelos que son casos particulares del mismo, como por ejemplo los modelos de vigas curvas para materiales isótropos. Se han efectuado varios estudios sobre el comportamiento dinámico de la viga curva de material funcional, mostrando mayor influencia de la velocidad de rotación en los modos fuera del plano.

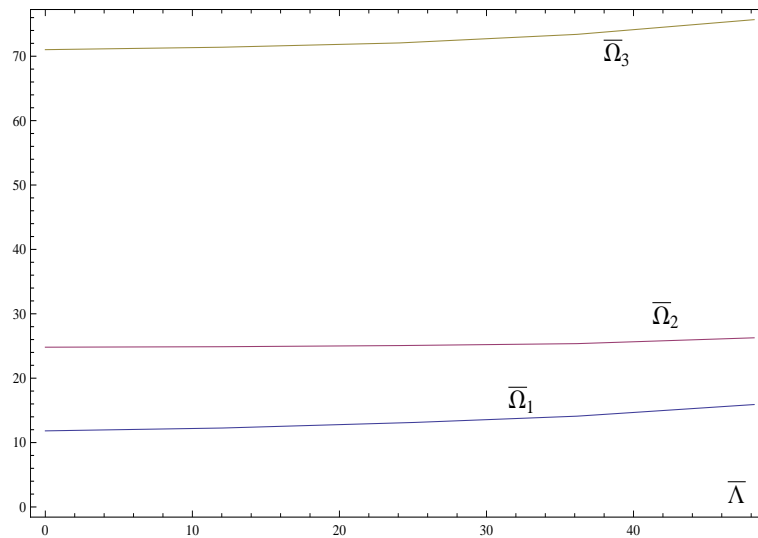


Figure 2: Variación de los tres primeros parámetros de frecuencia con el parámetro de velocidad.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el apoyo de la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional y del CONICET.

## REFERENCES

- Bathe K. *Finite Element procedures in Engineerign Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- Chakraborty A., Gopalakrishnan S., and Reddy J. A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45:519–539, 2003.
- Fazelzadeh S. and Hosseini M. Aerothermoelastic behavior of supersonic rotating thin-walled beams made of functionally graded materials. *Journal of fluids and structures*, 23:1251–1264, 2007.
- Fazelzadeh S., Malekzadeh P., Zahedinejad P., and Hosseini M. Vibration analysis of functionally graded thinwalled rotating blades under high temperature supersonic flow using the differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 306:333–348, 2007.
- Filipich C. and Piovan M. The dynamics of thick curved beams constructed with functionally graded materials. *Mechanics Research Communications*, 37:565–570, 2010.
- Kapuria S., Bhattacharyya M., and Kumar A. Bending and free vibration response of layered functionally graded beams: A theoretical model and its experimental validation. *Composites Structures*, 82:390–402, 2008.
- Lee S., Sheu J., and Lin S. In-plane vibrational analysis of rotating curved beam with elastically restrained root. *Journal of Sound and Vibration*, 315:1086–1102, 2008.
- Lekhnitskii S. *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Mir Publishers, Moscow, 1981.
- Lin S., Lee J., Lee S., and Wang W. Prediction of vibration of rotating damped beams with arbitrary pretwist. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48:1494–1504, 2006.
- Malekzadeh P., Golbahar Haghighi M., and Atashi M. Out-of-plane free vibration of functionally graded circular curved beams in thermal environment. *Composite Structures*, 92:541–552, 2010.

- Park J. and Kim J. Dynamic analysis of rotating curved beam with tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, 228(5):1017–1034, 1999.
- Piovan M. and Cortínez V. Mechanics of thin-walled curved beams made of composite materials, allowing for shear deformability. *Thin-Walled Structures*, 45:759–789, 2007.
- Piovan M. and Sampaio R. A study on the dynamics of rotating beams with functionally graded properties. *Journal of Sound and Vibration*, 327:134–143, 2009.
- Rao J. Turbomachine blade vibration. *The shock and vibration digest*, 19:3–10, 1987.
- Simo J. and Vu-Quoc L. A three dimensional finite-strain rod model. part ii. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58:79–116, 1986.
- Simo J. and Vu-Quoc L. The role of non-linear theories in transient dynamic analysis of flexible structures. *Journal of Sound and Vibration*, 119(3):487–508, 1987.
- Tufekci E. and Yasar Dogruer O. Out-of-plane free vibration of a circular arch with uniform cross-section: exact solution. *JSV*, 291:525–538, 2006.
- Yang Y. and Kuo S. Effects of curvature on stability of curved beams. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, 113(6):1185–1202, 1987.