



4^{to} Congreso Argentino de Ingeniería Aeronáutica



MODELO SIMPLE DE MOTORES STIRLING

G. Scarpin^a

^a*Dpto. Mec. Aer., Facultad de Ingeniería, Instituto Universitario Aeronáutico
Av. Fuerza Aérea 6500 (IX5010JMX) Córdoba, Argentina. <http://www.iua.edu.ar>*

Palabras claves: Termodinámica, Ciclo Stirling, Modelo de Matemático, Motores, Software

Resumen

Dentro del proyecto de desarrollo llevado a cabo por el Consorcio Público Privado Intihuasi, en el que el IUA es parte, y patrocinado por el Fondo de Innovación Tecnológica Sectorial de Energía Solar 2010 que administra el Fondo Argentino Sectorial (FONARSEC), y por el PIDDEF 037/12 patrocinado por el MinDef, se desarrolló un modelo matemático que permite predecir el comportamiento de los intercambiadores de calor de un motor Stirling basado en el modelo adiabático ideal Simple.

El modelo de análisis Simple fue desarrollado por el Dr. Israel Urieli del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Ohio. En este trabajo se implementa en un software dicho modelo con algunas pequeñas modificaciones, como por ejemplo, la adición de las pérdidas de presión en los conductos que unen los distintos intercambiadores de calor.

1. INTRODUCCIÓN

Existe una gran variedad de modelos matemáticos para estimar el comportamiento físico de los motores Stirling, desde los más simples, como el modelo isotérmico hasta los que modelan prácticamente todo el motor mediante CFD.

1.1. Modelo Adiabático

El Modelo Adiabático Ideal es uno de los más sencillos, pero a diferencia del modelo isotérmico permite estimar en forma preliminar la transferencia de calor en los distintos componentes.

Por lo general a todas las configuraciones de motores Stirling se los puede analizar dividiéndolos en 5 zonas conectadas en forma lineal tal como se muestra en la Figura 1.

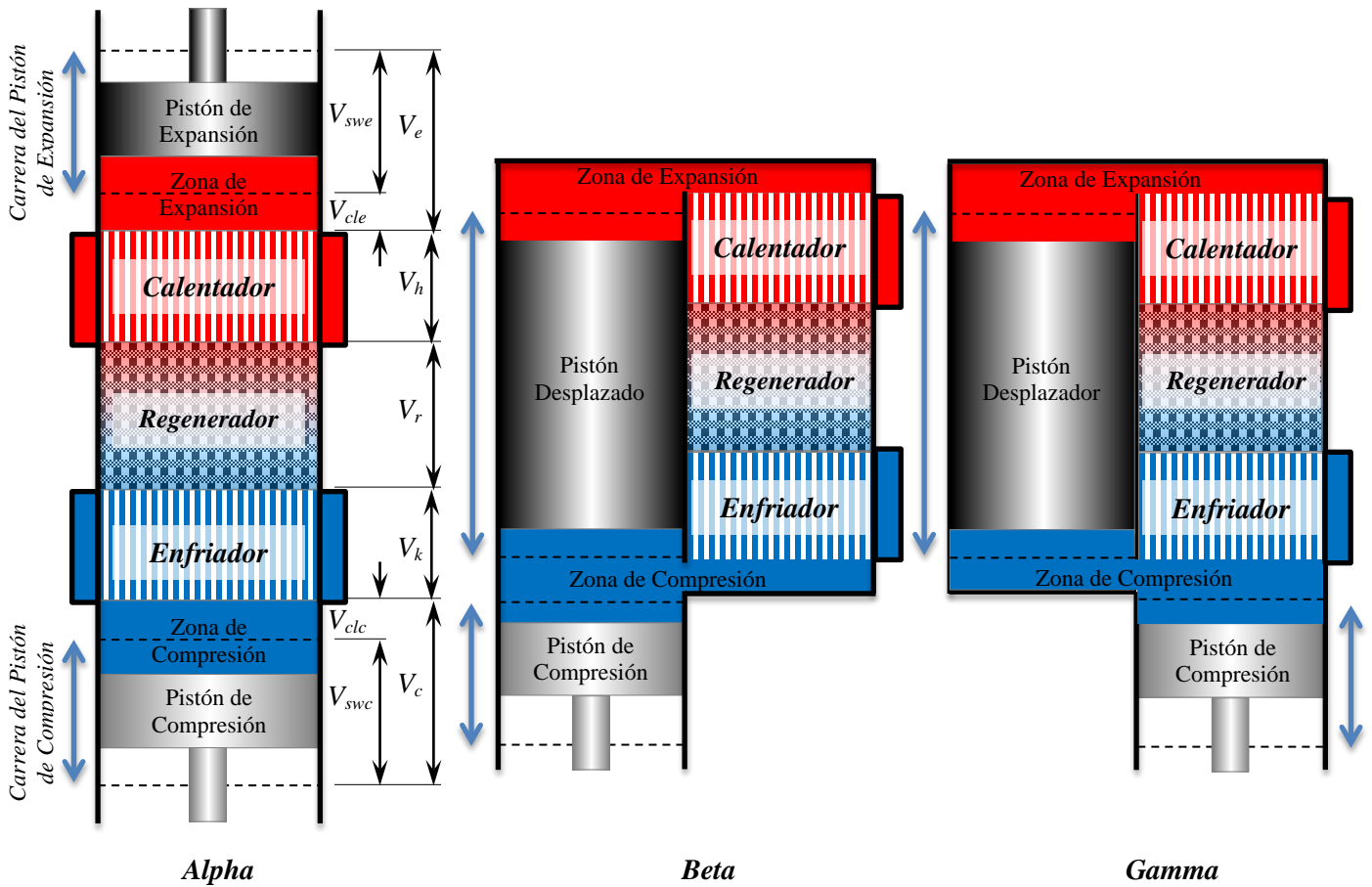


Figura 1: Tipo de Configuraciones de Motores Stirling

El enfriador, regenerador, y calentador tiene volúmenes constante V_k , V_r , y V_h respectivamente. Tanto la zona de compresión como la de expansión son cada una divididas en un volumen de holgura fija, V_{cle} y V_{cse} respectivamente, y un volumen que depende del tiempo variando entre 0 y sus respectivos valores máximos, V_{swc} y V_{swe} . La variación exacta de V_{swc} y V_{swe} durante un ciclo completo depende de las transmisiones mecánicas empleadas.

El Tipo-Alfa puede ser modelado colocando las cinco zonas, una detrás de otra, en un solo cilindro. En el Tipo-Beta tanto el pistón de potencia como el desplazador se alojan en un solo cilindro, mientras que en la Tipo-Gamma ocupan cilindros separados.

1.2. Modelo Simple

El modelo de análisis Simple, que aquí se describe, fue desarrollado por el Dr. Israel Urieli del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Ohio (Ref. [1]). El mismo incorpora al modelo adiabático los efectos de la transferencia de calor y la fricción del flujo en los tres intercambiadores de calor.

La transferencia de calor por convección forzada es fundamental para el funcionamiento del motor Stirling. El calor se transfiere desde la fuente de calor externa hacia el fluido de trabajo en la sección del calefactor, se almacena y recupera cíclicamente en el regenerador, y finalmente expulsado por el fluido de trabajo hacia el disipador de calor externo en la sección más fría. Todo esto se hace en los intercambiadores de calor compactos (gran área mojada en relación al volumen) a fin de limitar el "espacio muerto" a un valor aceptable y por lo tanto permitir una salida razonable de potencia específica del motor (Ref. [4]). Se observa que un eficaz intercambio de calor tiene como precio una alto valor de fricción en el flujo, lo que resulta en la llamada "pérdida de bombeo". Esta pérdida se refiere a la energía mecánica necesaria para "bombear" el fluido de trabajo a través de los intercambiadores de calor, y reduciendo así la potencia de salida neta del motor.

La teoría y el análisis de estos efectos son extremadamente complejos, y se llega finalmente a la conclusión que sólo se puede confiar en la gran cantidad estudios experimentales y empíricos documentados, por ejemplo los presentados en Ref. [5]. Casi toda esta vasta obra se basa en condiciones de flujo estacionario y no es, por lo tanto, directamente aplicable a las condiciones de flujo oscilantes que se observa en los motores Stirling. En este modelo se adopta un enfoque de flujo "cuasi-estacionario" en el que se supone que, en cada instante del ciclo, el flujo se comporta como si el caudal fuese constante. Este análisis fue bautizado por el Dr. Urieli como "Simple", ya que se considera que es una burda simplificación de un proceso sumamente complejo.

1.3. Implementación y Evaluación

Dentro del proyecto de desarrollo llevado a cabo por el Consorcio Público Privado Intihuasi, en el que el IUA es parte (Ref. [6]), y patrocinado por el Fondo de Innovación Tecnológica Sectorial de Energía Solar 2010 que administra el Fondo Argentino Sectorial (FONARSEC), y por el PIDDEF 037/12 patrocinado por el MinDef, se desarrolló un modelo matemático que permite predecir el comportamiento de los intercambiadores de calor de un motor Stirling basado en el modelo adiabático ideal Simple.

Al modelo original de Ref. [1] se le sumó el cálculo de la potencia en el eje incorporando la eficiencia mecánica y la pérdida por trabajo forzado (Ref. [7] y [8]). Este procedimiento de cálculo fue automatizado en un programa en Fortran denominado StirSimple.for, el cual fue utilizado para diseñar, dimensionar y evaluar los ensayos de los motores Stirling fabricados en el Proyecto Intihuasi.

2. MODELO ADIABATICO IDEAL

2.1. Principales Hipótesis

- a. El motor gira a velocidad constante, por lo tanto, el ángulo de rotación de la manivela θ es proporcional al tiempo.
- b. Todas las pérdidas de presión debido a la fricción y a las diferencias de presión necesarias para acelerar el flujo del gas de trabajo son despreciadas. Por tal motivo, la presión p , tiene el mismo valor en todo el motor y varía sólo con el tiempo. Consecuentemente, en la ecuación de conservación de energía, es despreciada la energía cinética del gas de trabajo.
- c. Se asumen despreciables las fugas de gas hacia el exterior.
- d. Se asume que las zonas de compresión y expansión, con volúmenes V_c y V_e , son adiabáticas. Esto significa que no existe intercambio de calor entre el gas y su entorno, tanto sea las superficies de las paredes como en las de las caras del pistón/desplazador. Las temperaturas en cada uno de estos espacios es uniforme pero varían durante el ciclo debido a los cambios de presión, volumen y masa del gas procedente de la zona del enfriador y calentador respectivamente.
- e. Las condiciones de transferencia de calor en la zona del enfriador es lo suficientemente buena como para mantener el gas dentro del volumen V_k a la temperatura T_c uniforme y constante en todo momento. Lo mismo es cierto para la zona del calentador de volumen V_h , siendo la temperatura del mismo T_h uniforme y constante.
- f. Las condiciones de transferencia de calor son suficientes para mantener lineal la distribución de temperaturas dentro del regenerador, el volumen V_r , variando de T_c , donde el regenerador está conectado al enfriador, hasta T_h en el lado del calentador.
- g. Se asume que el gas de trabajo es un gas ideal, es decir:

$$pV = mRT \quad (1)$$

$$c_p - c_v = R \quad , \quad \gamma = c_p / c_v \quad (2)$$

$$u = c_v T \quad , \quad h = c_p T \quad (3)$$

2.2. Desarrollo del grupo de ecuaciones

2.2.1. Conservación de la masa

El balance de masa para cualquier sistema sometido a cualquier proceso puede ser expresado como (Ref. [2]):

$$m_{in} - m_{out} = \Delta m_{system} \quad (4)$$

Donde $\Delta m_{system} = m_{final} - m_{initial}$ es el cambio en la masa del sistema. Para volúmenes de control (CV), también puede ser expresado más explícitamente como:

$$m_i - m_e = (m_2 - m_1)_{CV} \quad (5)$$

Donde: i = entrada, e = salida, 1 = estado inicial del CV, 2 = estado final del CV.

2.2.2. Conservación de energía

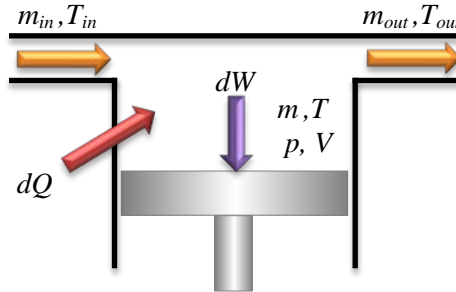


Figura 2: Motores Stirling – Modelo general para las 5 zonas [1]

De la primera ley de la termodinámica:

$$\underbrace{E_{in} - E_{out}}_{\text{Energía neta transferida por calor, trabajo y masa.}} = \underbrace{\Delta E_{system}}_{\text{Cambio en las energías interna, cinética y potencial}} \quad (6)$$

El proceso de flujo inestacionario general, por lo general, es dificultoso de analizar debido a que las propiedades de la masa en la entrada y salida pueden cambiar durante un proceso. Sin embargo, la mayoría de los procesos de flujo inestacionario, pueden ser representados razonablemente bien mediante un proceso de flujo uniforme, el cual involucra la siguiente idealización:

Las propiedades del fluido, a lo largo de la sección de una entrada o salida, son uniformes y constantes, es decir, no cambian con el tiempo o la posición. Si lo hacen, se promedian y se tratan como constantes durante todo el proceso.

El balance de energía para un sistema de flujo uniforme puede ser expresado explícitamente como (Ref. [2]):

$$\left[Q_{in} + W_{in} + \sum_{in} m(h + ke + pe) \right] - \left[Q_{out} + W_{out} + \sum_{out} m(h + ke + pe) \right] = \left[m_2(u + ke + pe)_2 - m_1(u + ke + pe)_1 \right]_{system} \quad (7)$$

Cuando los cambios de energía cinética y potencial asociado con el volumen de control y flujos de fluidos son insignificantes, como suele ser generalmente, el balance de energía se simplifica a:

$$\Delta Q - \Delta W = \sum_{out} m h - \sum_{in} m h + (m_2 u_2 - m_1 u_1)_{system} \quad (8)$$

Con

$$\Delta Q = Q_{net,in} = Q_{in} - Q_{out} \quad (9)$$

$$\Delta W = W_{net,in} = W_{in} - W_{out} \quad (10)$$

2.2.3. Transferencia de calor en el modelo de motor adiabático

La ecuación general de energía puede escribirse como:

$$DQ + (c_p T_{in} m_{in} - c_p T_{out} m_{out}) = dW + c_v D(mT) \quad (11)$$

Asumiendo gas ideal (1) y luego aplicando el logaritmo y diferenciando:

$$\frac{Dp}{p} + \frac{DV}{V} = \frac{Dm}{m} + \frac{DT}{T} \quad (12)$$

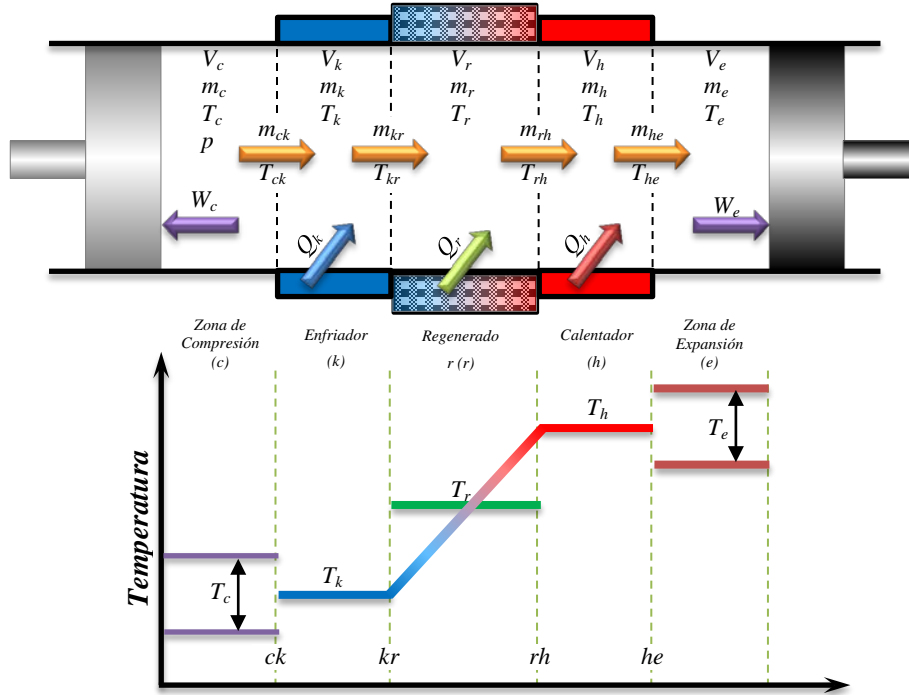


Figura 3: Motores Stirling – Modelo Adiabático Ideal [1]

La masa total de trabajo permanece constante, se manera que:

$$m_c + m_k + m_r + m_h + m_e = M \quad (13)$$

Diferenciando la ec. de masa total:

$$Dm_c + Dm_k + Dm_r + Dm_h + Dm_e = 0 \quad (14)$$

De la ecuación de masa total y (13) de la ec. de estado (1) se tiene:

$$p \left(\frac{V_c}{T_c} + \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_e}{T_e} \right) = M R \quad (15)$$

Según el modelo de temperatura presentado en Figura 3, la temperatura media efectiva del regenerador resulta:

$$T_r = \frac{T_h - T_k}{\ln \left(\frac{T_h}{T_k} \right)} \quad (16)$$

Despejando la presión de la ecuación anterior,

$$p = \frac{M R}{\frac{V_c}{T_c} + \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_e}{T_e}} \quad (17)$$

2.2.4. Obtención de las ecuaciones diferenciales relevantes

2.2.4.1. Zona de compresión

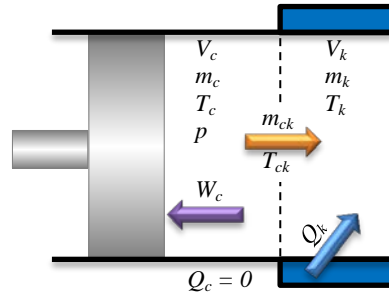


Figura 4: Modelo Zona de Compresión [1]

$$\text{De la ecuación de estado: } m_c = \frac{p V_c}{R T_c} \quad (18)$$

Por otro lado, aplicando la ecuación de energía a esta zona, se tiene:

$$-c_p T_{ck} \dot{m}_{ck} = dW_c + c_v D(m_c T_c) \quad (19)$$

Considerando la ecuación de continuidad, la velocidad de acumulación de gas es igual a la masa entrante, es decir: $Dm_c = -\dot{m}_{ck}$, y el trabajo realizado es dado por $dW_c = p DV_c$.

$$c_p T_{ck} Dm_c = p DV_c + c_v D(m_c T_c) \quad (20)$$

De la ecuación anterior y con las tres primeras relaciones para gas ideal, listadas anteriormente, operando:

$$Dm_c = \frac{\gamma p DV_c + V_c Dp}{\gamma R T_{ck}} \quad (21)$$

Para tener en cuenta la diferencia de temperatura entre la zona del compresor y el calentador, se tiene:

$$\text{If } (\dot{m}_{ck} > 0) \text{ then } T_{ck} = T_c \text{ else } T_{ck} = T_k \quad (22)$$

De la forma diferencial de la ecuación de estado:

$$DT_c = T_c \left(\frac{Dp}{p} + \frac{DV_c}{V_c} - \frac{Dm_c}{m_c} \right) \quad (23)$$

2.2.4.2. Zona de expansión

Operando de igual forma que en la zona de compresión se tiene:

$$m_e = \frac{p V_e}{R T_e} \quad (24)$$

$$Dm_e = \dot{m}_{he} \quad (25)$$

$$Dm_e = \frac{\gamma p DV_e + V_e Dp}{\gamma R T_{he}} \quad (26)$$

Con

$$\text{If } (\dot{m}_{he} > 0) \text{ then } T_{he} = T_h \text{ else } T_{he} = T_e \quad (27)$$

$$DT_e = T_e \left(\frac{Dp}{p} + \frac{DV_e}{V_e} - \frac{Dm_e}{m_e} \right) \quad (28)$$

2.2.4.3. Regenerador

$$\text{De la ecuación de estado: } m_r = \frac{p V_r}{R T_r} \quad (29)$$

La temperatura efectiva del regenerador es:

$$T_r = \frac{T_h - T_k}{\ln\left(\frac{T_h}{T_k}\right)} \quad (30)$$

Este valor estacionario de temperatura puede ser usado para calcular la masa dentro del regenerador, asumiendo gas ideal y teniendo en cuenta la distribución lineal de temperatura. Con el volumen V_r permaneciendo constante, un cambio en la masa es relacionado simplemente al cambio en la presión:

$$Dm_r = \frac{m_r}{p} Dp = \frac{V_r}{R T_r} Dp \quad (31)$$

El flujo másico resulta (caudal entrante +):

$$\dot{m}_{kr} = \dot{m}_{ck} - dm_k \quad (32)$$

$$\dot{m}_{rh} = \dot{m}_{he} + dm_h \quad (33)$$

De la ecuación de energía, siendo el trabajo nulo:

$$DQ_r + c_p (T_{kr} \dot{m}_{kr} - T_{rh} \dot{m}_{rh}) = c_v T_r Dm = c_v \frac{V_r}{R} Dp \quad (34)$$

Reordenando

$$DQ_r = c_v \frac{V_r}{R} Dp - c_p (T_{kr} \dot{m}_{kr} - T_{rh} \dot{m}_{rh}) \quad (35)$$

Otra aproximación es la presentada en Ref. [3]:

$$DQ_r = \frac{[V_r + \gamma(V_c + V_k + V_h + V_e)] Dp + \gamma p (DV_e + DV_c)}{\gamma - 1} \quad (36)$$

2.2.4.4. Zona de calentamiento

Las ecuaciones son similares a las deducidas para el regenerador, sólo que en este caso la temperatura es impuesta. Las ecuaciones para esta zona son:

$$m_h = \frac{p V_h}{R T_h} \quad (37)$$

$$Dm_h = \frac{m_h}{p} Dp = \frac{V_h}{R T_h} Dp \quad (38)$$

$$DQ_h = c_v \frac{V_h}{R} Dp - c_p (T_{rh} \dot{m}_{rh} - T_{he} \dot{m}_{he}) \quad (39)$$

2.2.4.5. Zona de enfriamiento

Las condiciones, y por lo tanto las ecuaciones resultantes, son similares a las anteriores:

$$m_k = \frac{p V_k}{R T_k} \quad (40)$$

$$Dm_k = \frac{m_k}{p} Dp = \frac{V_k}{R T_k} Dp \quad (41)$$

$$DQ_k = c_v \frac{V_k}{R} Dp - c_p (T_{ck} \dot{m}_{ck} - T_{kr} \dot{m}_{kr}) \quad (42)$$

2.2.4.6. Ecuación de variación de presión

De la ec. (14), reemplazando los diferenciales de masa (21), (26), (31), (38) y (41):

$$\frac{\gamma p DV_c + V_c Dp}{\gamma R T_{ck}} + \frac{V_k}{R T_k} Dp + \frac{V_r}{R T_r} Dp + \frac{V_h}{R T_h} Dp + \frac{\gamma p DV_e + V_e Dp}{\gamma R T_{he}} = 0 \quad (43)$$

Despejando el diferencial de presión se obtiene:

$$Dp = \frac{-\gamma p \left(\frac{DV_c}{T_{ck}} + \frac{DV_e}{T_{he}} \right)}{\left[\frac{V_c}{T_{ck}} + \gamma \left(\frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} \right) + \frac{V_e}{T_{he}} \right]} \quad (44)$$

2.2.4.7. Trabajo

Finalmente el trabajo realizado en las celdas de compresión y expansión está dado por:

$$W = W_c + W_e \quad (45)$$

$$DW_c = p DV_c \quad (46)$$

$$DW_e = p DV_e \quad (47)$$

$$DW = DW_c + DW_e \quad (48)$$

Reemplazando:

$$DW = p DV_c + p DV_e \quad (49)$$

2.3. Resumen de ecuaciones

2.3.1. Presión

$$p = \frac{M R}{\frac{V_c}{T_c} + \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_e}{T_e}} \quad (17)$$

$$Dp = \frac{-\gamma p \left(\frac{DV_c}{T_{ck}} + \frac{DV_e}{T_{he}} \right)}{\left[\frac{V_c}{T_{ck}} + \gamma \left(\frac{V_k}{T_k} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_h}{T_h} \right) + \frac{V_e}{T_{he}} \right]} \quad (44)$$

2.3.2. Masas

$$m_c = \frac{p V_c}{R T_c} \quad (18)$$

$$m_k = \frac{p V_k}{R T_k} \quad (40)$$

$$m_r = \frac{p V_r}{R T_r} \quad (29)$$

$$m_h = \frac{p V_h}{R T_h} \quad (37)$$

$$m_e = \frac{p V_e}{R T_e} \quad (24)$$

2.3.3. Acumulación de masa

$$Dm_c = \frac{\gamma p DV_c + V_c Dp}{\gamma R T_{ck}} \quad (21)$$

$$Dm_k = \frac{V_k}{R T_k} Dp \quad (41)$$

$$Dm_r = \frac{V_r}{R T_r} Dp \quad (31)$$

$$Dm_h = \frac{V_h}{R T_h} Dp \quad (38)$$

$$Dm_e = \frac{\gamma p DV_e + V_e Dp}{\gamma R T_{he}} \quad (26)$$

2.3.4. Caudal másico

$$Dm_c = -\dot{m}_{ck} \quad (50)$$

$$\dot{m}_{kr} = \dot{m}_{ck} - dm_k \quad (51)$$

$$\dot{m}_{rh} = \dot{m}_{he} + dm_h \quad (52)$$

$$Dm_e = \dot{m}_{he} \quad (53)$$

2.3.5. Condicional de temperatura

$$\text{If } (\dot{m}_{ck} > 0) \text{ then } T_{ck} = T_c \text{ else } T_{ck} = T_k \quad (22)$$

$$\text{If } (\dot{m}_{he} > 0) \text{ then } T_{he} = T_h \text{ else } T_{he} = T_e \quad (27)$$

2.3.6. Energía

$$DW_c = p DV_c \quad (54)$$

$$DQ_k = c_v \frac{V_k}{R} Dp - c_p (T_{ck} \dot{m}_{ck} - T_{kr} \dot{m}_{kr}) \quad (42)$$

$$DQ_r = c_v \frac{V_r}{R} Dp - c_p (T_{kr} \dot{m}_{kr} - T_{rh} \dot{m}_{rh}) \quad (35)$$

$$DQ_h = c_v \frac{V_h}{R} Dp - c_p (T_{rh} \dot{m}_{rh} - T_{he} \dot{m}_{he}) \quad (39)$$

$$DW_e = p DV_e \quad (47)$$

$$DW = DW_c + DW_e \quad (48)$$

$$W = W_c + W_e \quad (45)$$

El sistema está formado por 22 variables y 16 derivadas a ser resueltas en un ciclo completo ($\theta = [0, 2\pi]$):

- 7 derivadas a ser integradas numéricamente: $T_c, T_e, Q_k, Q_r, Q_h, W_c, W_e$
- 9 variables y derivadas analíticas: $W, p, V_c, V_e, m_c, m_k, m_r, m_h, m_e$
- 6 variables condicionales y de flujo másico (derivadas indefinidas): $T_{ck}, T_{he}, \dot{m}_{ck}, \dot{m}_{kr}, \dot{m}_{rh}, \dot{m}_{he}$

2.4. Consideraciones varias

1. El modelo representa un sistema de flujo cuasi-estacionario, en el cual, entre los intervalos de integración, se asume que las cuatro variables de flujo másico ($\dot{m}_{ck}, \dot{m}_{kr}, \dot{m}_{rh}, \dot{m}_{he}$) permaneces constante, es decir, no existen efectos por la aceleración.

2. Si los intercambiadores de calor son isotérmicos y el regenerador es ideal, se tiene por definición que:

$$\begin{aligned} T_{kr} &= T_k \\ T_{rh} &= T_h \end{aligned} \quad (55)$$

3. El modelo Adiabático Ideal no es un modelo de valor inicial sino que es un problema de condiciones de contorno. Por lo tanto no se conocen los valores iniciales de T_c y T_e , los cuales resultan de los procesos de compresión y expansión adiabáticos, así como de los procesos de flujos entálpicos. Para obtenerlos se asignan valores arbitrarios como condiciones iniciales y se espera que los valores de los mismos sean iguales al principio ($\theta = 0^\circ$) y final del ciclo ($\theta = 360^\circ$) (Por ejemplo con un error relativo de 10^{-5}). Generalmente se suele asignar como condición inicial:

$$\begin{aligned} T_{c_0} &= T_k \\ T_{e_0} &= T_h \end{aligned} \quad (56)$$

Generalmente es necesario entre 5 y 10 ciclos para que el sistema converja.

4. Se suele usar Runge-Kutta de 4to orden para integrar el sistema hasta lograr las condiciones estacionarias (repetitividad entre dos ciclos). Se lo suele verificar calculando la presión promedio del ciclo y verificando que sea igual a la presión promedio propuesta en la entrada (por ej. 20 Bar).

5. En el caso de movimiento sinusoidal:

$$V_c = V_{clc} + \frac{V_{swc}}{2} (1 - \cos(\theta)) \quad (57)$$

$$V_e = V_{cle} + \frac{V_{swe}}{2} (1 - \cos(\theta + \alpha)) \quad (58)$$

$$dV_c = \frac{V_{swc}}{2} \sin(\theta) d\theta \quad (59)$$

$$dV_e = \frac{V_{swe}}{2} \sin(\theta + \alpha) d\theta \quad (60)$$

Donde α es el desfase de volumen (VLP).

6. Los datos de entrada específicos del Modelo adiabático Ideal son:

- i. Gas de trabajo: Define γ y R , ó, c_p y c_v
- ii. Presión promedio, P_{ave}
- iii. Temperatura del calentador, T_h
- iv. Temperatura del enfriador, T_k
- v. Desfase de volumen, α
- vi. Volumen libre de compresión, V_{clc}
- vii. Volumen de barrido de compresión, V_{swc}
- viii. Volumen del enfriador, V_k
- ix. Volumen del regenerador, V_r
- x. Volumen del calentador, V_h
- xi. Volumen de barrido de expansión, V_{swe}
- xii. Volumen libre de expansión, V_{cle}
- xiii. Velocidad de rotación de la manivela, $\dot{\theta}$

3. MODELO SIMPLE

El Modelo Simple es el Modelo Adiabático al que se le incorporan los efectos de la transferencia de calor y la fricción del flujo en los tres intercambiadores de calor.

3.1. Transferencia de Calor en el Regenerador

3.1.1. Modelo de Regenerador No Ideal

Por definición, un regenerador es un dispositivo cíclico. En la primera parte del ciclo el gas caliente fluye a través del regenerador desde el calentador al enfriador, y al hacerlo transfiere calor a la matriz del regenerador. Esto es conocido en la literatura como “single blow” (soplido único). Posteriormente durante la segunda parte del ciclo, el gas frío fluye en la dirección inversa, absorbiendo el calor que se ha almacenado previamente en la matriz. Por lo tanto en el estado estacionario la transferencia neta de calor por ciclo entre el gas de trabajo y la matriz del regenerador es cero.

La calidad del regenerador es normalmente definida en términos de la eficiencia ε del regenerador basados en la entalpía tal como sigue:

$$\varepsilon \equiv \frac{\text{cambio de entalpía del gas al atravesar el regenerador durante un soplido único}}{\text{cambio de entalpía teórica máxima equivalente en un regenerador ideal}} \quad (61)$$

Sin embargo, esta definición no es susceptible de utilización en los motores Stirling. Por ello se propone una definición equivalente en el contexto del modelo ideal adiabático^[1], que representa la medida limitante del máximo rendimiento tal como sigue:

$$\varepsilon \equiv \frac{\left(\text{cantidad de calor transferido desde la matriz al gas} \right)}{\left(\text{cantidad equivalente de calor transferido en el regenerador en un modelo Adiabático Ideal} \right)} \quad (62)$$

La eficiencia del regenerador ε , por lo tanto varía desde 1 para un regenerador ideal (como se define en el modelo adiabático ideal §2.2.4.3) a 0 para ninguna acción regenerativa.

Por ejemplo, considerando el diagrama energía-theta obtenido del análisis Ideal adiabático para el motor Ross D-90 descrito en Ref. [9], se tiene:

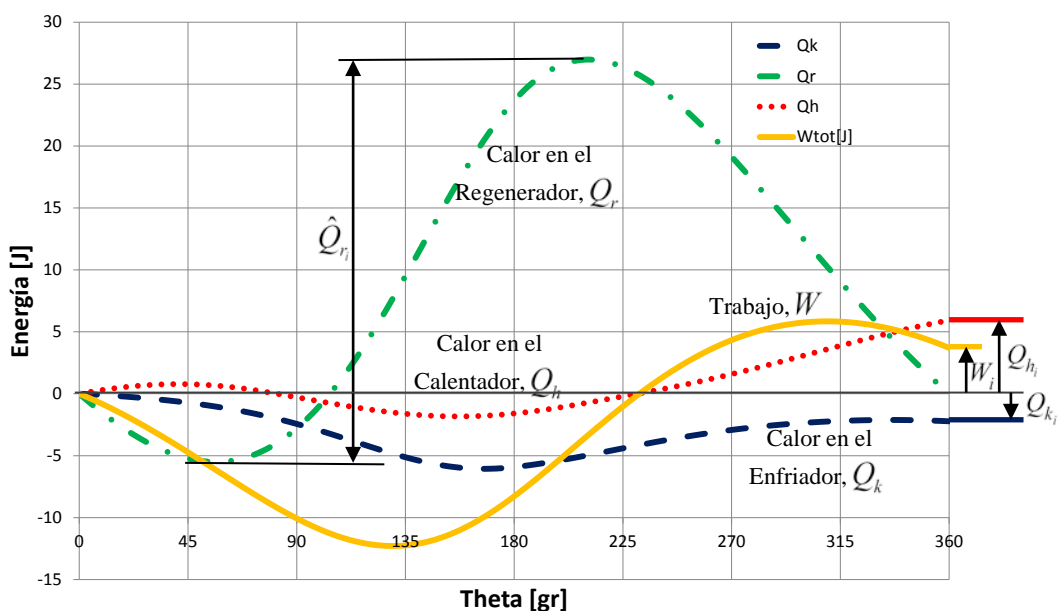


Figura 5: Diagrama Energía-Theta – Motor Ross D-90

La eficiencia térmica del ciclo Adiabático Ideal (subíndice "i") se da en términos de los valores de energía acumulada al final del ciclo a través de:

$$\eta_i = \frac{W_i}{Q_{h_i}} = \frac{Q_{h_i} + Q_{k_i}}{Q_{h_i}} \quad (63)$$

De la Figura 5 se puede observar que Q_{k_i} es un valor negativo, resultando para el motor Ross D-90, $\eta_i = 0.625$

Se debe tener en cuenta también la gran cantidad de calor transferido en un soplido único del regenerador dado por \hat{Q}_{r_i} . Así, para el motor D-90, como se muestra, la relación $\hat{Q}_{r_i}/Q_{h_i} = 5.48$.

Ahora, para un sistema que tiene un regenerador no ideal, durante un soplido único, cuando el gas de trabajo fluye desde el enfriador hacia el calentador, a la salida del regenerador se tendrá una temperatura algo más baja que la del calentador. Esto dará lugar a que desde el calentador se deberá suministrar externamente más calor sobre el ciclo con el propósito de aumentar la temperatura del gas. Se puede escribir cuantitativamente como sigue:

$$Q_h = Q_{h_i} + \hat{Q}_{r_i} (1 - \varepsilon) \quad (64)$$

De manera similar, cuando el gas de trabajo fluye desde el calentador al refrigerador, una carga de refrigeración adicional será sumada al refrigerador, como sigue:

$$Q_k = Q_{k_i} - \hat{Q}_{r_i} (1 - \varepsilon) \quad (65)$$

La eficiencia térmica del motor no ideal (sin el sufijo "i") viene dada por:

$$\eta = \frac{W}{Q_h} = \frac{Q_h + Q_k}{Q_h} \quad (66)$$

Sustituyendo Q_h , Q_k y η_i de las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\eta = \frac{\eta_i}{\left[1 + \left(\frac{\hat{Q}_{r_i}}{Q_{h_i}} \right) (1 - \varepsilon) \right]} \quad (67)$$

En el siguiente diagrama se presenta una gráfica de la ecuación anterior para el caso específico del motor D-90 y muestra el efecto de la eficiencia del regenerador, ε , en la eficiencia térmica η .

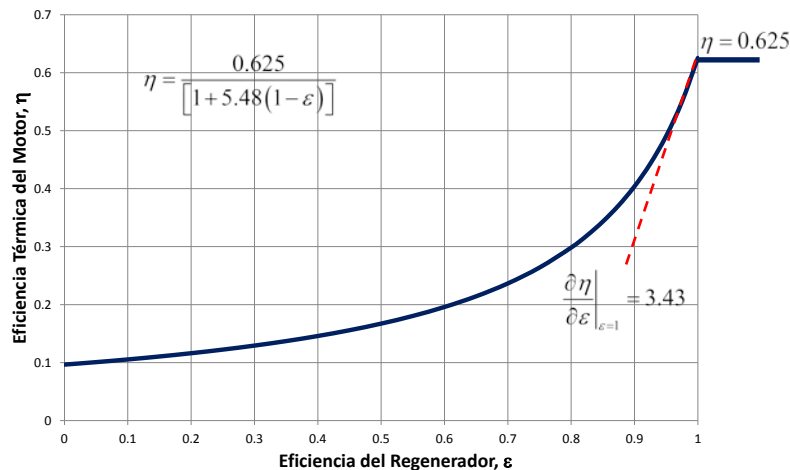


Figura 6: Diagrama de Eficiencia – Motor Ross D-90

En la Figura 6 se observa que, como ε varía desde 1 para un regenerador ideal (ciclo adiabático ideal §2.2.4.3) a 0 para ninguna acción regenerativa, la eficiencia térmica η cae desde más del 60% a menos del 10%. Por otra parte, diferenciando la ecuación de eficiencia η con respecto a ε , y evaluando para $\varepsilon = 1$ se obtiene:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon} = \eta_i \frac{\hat{Q}_{r_i}}{Q_{h_i}} \quad (68)$$

Para el caso del motor Ross D-90: $\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon} = 0.625 \cdot 5.48 = 3.43$

Se observa que para regeneradores de gran eficiencia (cerca de $\varepsilon = 1$) una reducción del 1% en la eficiencia del regenerador implica una reducción de más de 3% en la eficiencia térmica η . Por otra parte, se ve que si se tiene un regenerador que posee una eficiencia $\varepsilon = 0,8$, el rendimiento térmico, en este caso, se reduce a la mitad, alrededor del 30%. Esto no sólo significa que se obtiene un motor mucho menos eficiente, sino que además se debe disponer de un calentador y enfriador significativamente mayores.

3.2. Evaluación de la Eficiencia del Regenerador

Seguidamente se analiza la eficiencia del regenerador, ε , en términos del perfil de temperatura del flujo de gas “caliente” y “frío” con respecto a de la matriz del regenerador. Se asume una diferencia de temperatura ΔT tanto para el flujo caliente como frío. Asumiendo perfiles lineales de temperatura, se llega a la definición de la eficiencia del regenerador en términos de temperatura, tal como se muestra:

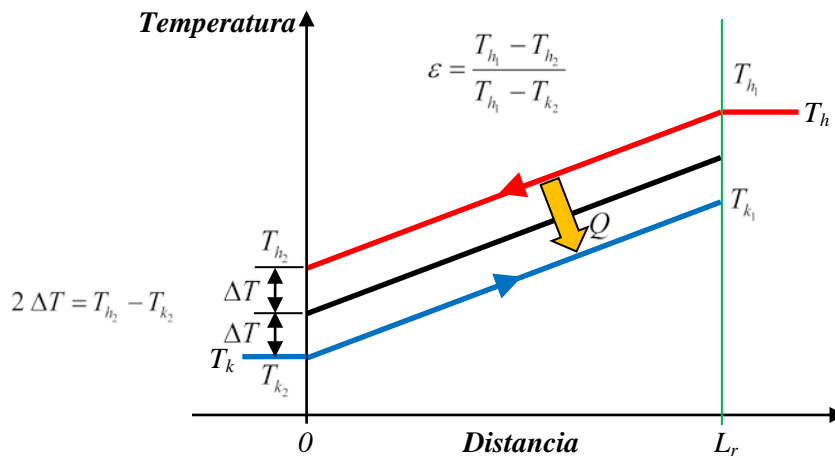


Figura 7: Perfil de temperatura en el Regenerador

Combinando las dos ecuaciones de la Figura 7, se tiene:

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \left(\frac{2 \Delta T}{T_{h_1} - T_{h_2}} \right)} \quad (69)$$

Teniendo en cuenta el balance de energía, el cambio de entalpía del flujo de gas caliente es igual a la transferencia de calor desde el gas caliente a la matriz, y posteriormente de la matriz al gas frío, por lo tanto:

$$\dot{Q} = c_p \dot{m} (T_{h_1} - T_{h_2}) = 2 h A_{wg} \Delta T \quad (70)$$

donde \dot{Q} (watts) es el flujo de calor, h es el coeficiente de transferencia de calor total (gas caliente→matriz→gas frío), A_{wg} es el área mojada por el gas, c_p es el calor específico a presión constante y \dot{m} (kg/s) es el flujo másico que atraviesa el regenerador. Sustituyendo la ecuación anterior en la de eficiencia del regenerador ε , se obtiene:

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \left(\frac{c_p \dot{m}}{h A_{wg}} \right)} \quad (71)$$

Introduciendo el concepto de Número de Unidades de Transferencia (NTU), muy usado en los estudios de los intercambiadores de calor, el cual es definido como:

$$NTU \equiv \frac{h A_{wg}}{c_p \dot{m}} \quad (72)$$

la eficiencia del regenerador puede ser escrita como:

$$\varepsilon = \frac{NTU}{1 + NTU} \quad (73)$$

Se observa que el valor de NTU es tanto una función del tipo de intercambiador de calor, como de sus dimensiones físicas. Esto incluye el área mojada A_{wg} y el flujo de masa que atraviesa el regenerador \dot{m} .

En el análisis de los intercambiadores de calor (Ref. [10]) es usual evaluar los parámetros del intercambiador en términos de las propiedades del fluido lo cual es independiente del tamaño. Para ello se hace uso del número de Stanton, el cual es definido como:

$$N_{ST} = \frac{h}{\rho u c_p} \quad (74)$$

donde ρ es la densidad y u es la velocidad del fluido. Por otro lado, $\dot{m} = \rho u A$, donde A es el área de flujo libre que atraviesa la matriz. Con lo anterior se puede obtener el valor de NTU en términos del número Stanton como sigue:

$$NTU = \frac{N_{ST} A_{wg}}{2 A} \quad (75)$$

El factor de 2 en la última ecuación es inusual, y se deriva del hecho de que el número Stanton se define generalmente por la transferencia de calor de la corriente de gas a la matriz solamente, mientras que el uso de NTU en esta oportunidad es para la transferencia global de calor del corriente caliente a la matriz regenerador, y posteriormente a la corriente fría.

En textos sobre intercambiadores de calor, existen tablas y gráficas de valores empíricos de número Stanton vs número de Reynolds para diferentes tipos de intercambiadores, por ejemplo para matrices tipo tela de alambre tejida (Ref. [10]):

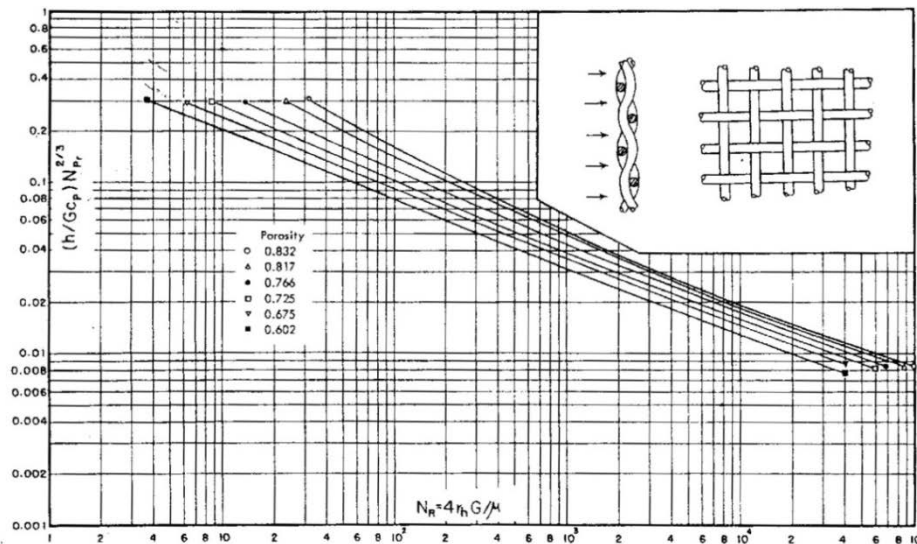


Fig. 5.7 Correlation of Stanton number, N_{st} , with Reynolds number, N_{re} , in the graphical representation pioneered by Kays and London. Reproduced with permission of McGraw-Hill Ltd and of Professors W. M. Kays and A. L. London

Figura 8: Número de Stanton vs. Número de Reynolds para matriz tipo tela de alambre [10]

Sin embargo, debido a la naturaleza inestacionaria del flujo en un motor Stirling, los valores de número de Stanton obtenidos mediante mediciones en condiciones estacionarias son poco representativos.

3.3. Transferencia de Calor en el Calentador y Enfriador

En la Figura 9 se puede observar que para un calentador y regenerador no ideales se tiene que la temperatura media efectiva del gas en la zona de calentamiento (T_h) resulta menor que en la pared del calentador (T_{w_h}). Igualmente, para un enfriador y regenerador no ideal se tiene que la temperatura media efectiva del gas en la zona de enfriamiento (T_k) resulta mayor que en la pared del enfriador (T_{w_k}). Esto tiene un efecto significativo en el rendimiento del motor, ya que está operando efectivamente con una diferencia de temperatura inferior a los existentes entre las paredes del calentador y enfriador. Por esta razón, el modelo Simple del calentador y enfriador determina iterativamente las diferencias de temperatura usando las ecuaciones de transferencia de calor por convección. Los valores de Q_h y Q_k son evaluados mediante el Modelo Adiabático Ideal (§2) y el valor de la entalpía perdida por el regenerador $Q_{r_{loss}}$ en términos de la eficiencia del regenerador (§3.2).

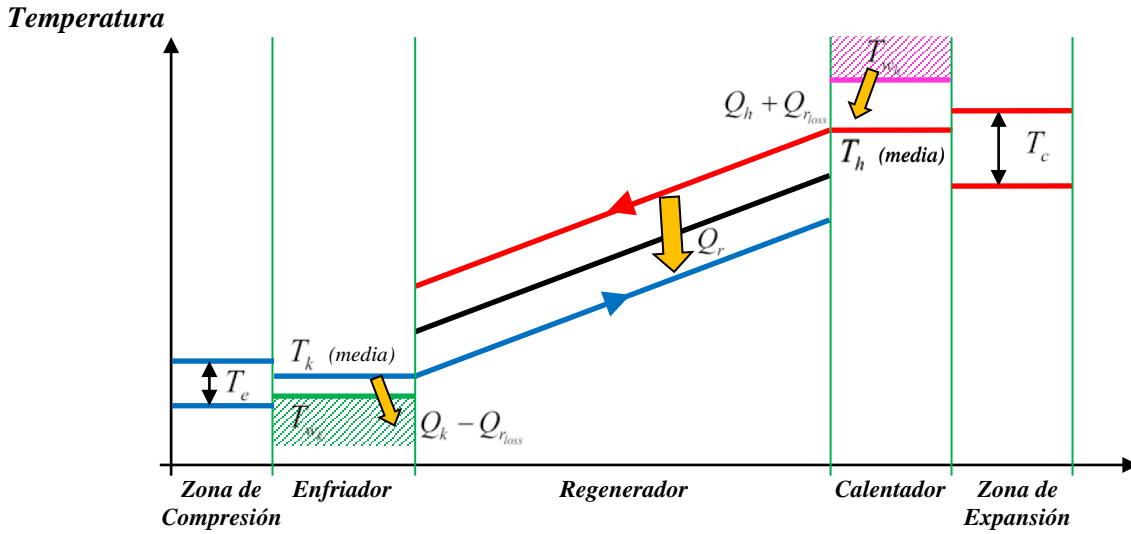


Figura 9: Distribución de Temperatura para el modelo Simple [1]

De la ecuación básica de transferencia de calor por convección se obtiene

$$\dot{Q} = h A_{wg} (T_w - T) \quad (76)$$

donde \dot{Q} (watts) es el flujo de calor total (incluida la pérdida de entalpía en el regenerador), h es el coeficiente de transferencia de calor por convección, A_{wg} es el área mojada por el gas en el intercambiador, T_w es la temperatura en la pared y T la temperatura del gas.

Con el propósito de reducir las unidades de la ecuación anterior para obtener el calor neto transferido por ciclo Q (joule/ciclo) se divide ambos miembros por la frecuencia de funcionamiento ($freq$), resultando:

$$Q_k - Q_{r_{loss}} = \frac{h_k A_{wg_k} (T_{w_k} - T_k)}{freq} \quad (77)$$

$$Q_h + Q_{r_{loss}} = \frac{h_h A_{wg_h} (T_{w_h} - T_h)}{freq} \quad (78)$$

donde, tal como se observa en la Figura 9, el subíndice h hace referencia al calentador, y k al enfriador. Seguidamente se reescriben las ecuaciones anteriores con el propósito de evaluar las temperaturas de gas T_k y T_h :

$$T_k = T_{w_k} - \frac{(Q_k - Q_{r_{loss}}) freq}{h_k A_{wg_k}} \quad (79)$$

$$T_h = T_{w_h} - \frac{(Q_h + Q_{r_{loss}}) freq}{h_h A_{wg_h}} \quad (80)$$

El modelo propuesto requiere una solución iterativa invocando a la simulación Adiabática Ideal¹ para cada nuevo valor de T_k y T_h , hasta que se alcanza la convergencia. Luego de cada simulación se dispone de los valores de Q_k y Q_h . $Q_{r_{loss}}$ es obtenido a partir de la eficiencia del regenerador:

$$Q_{r_{loss}} = (1 - \varepsilon) \hat{Q}_r \quad (81)$$

El caudal másico que atraviesa el calentador y enfriador se utilizan para determinar los números de Reynolds promedio y con ello los coeficientes de transferencia de calor necesarios para evaluar las ecuaciones de T_k y T_h .

A modo de ejemplo, en la Figura 10 se muestra la distribución de temperatura obtenida de una simulación Simple del motor Ross D90. Se puede observar que la temperatura media del gas en la zona del calentador es de 59 grados por debajo de la de la pared del calentador, y de manera similar la temperatura media del gas en la zona fría es de 15 grados por encima de la de la pared del enfriador. Esta disminución en la diferencia de temperatura de funcionamiento reduce la potencia de salida de 178 W a 147 W

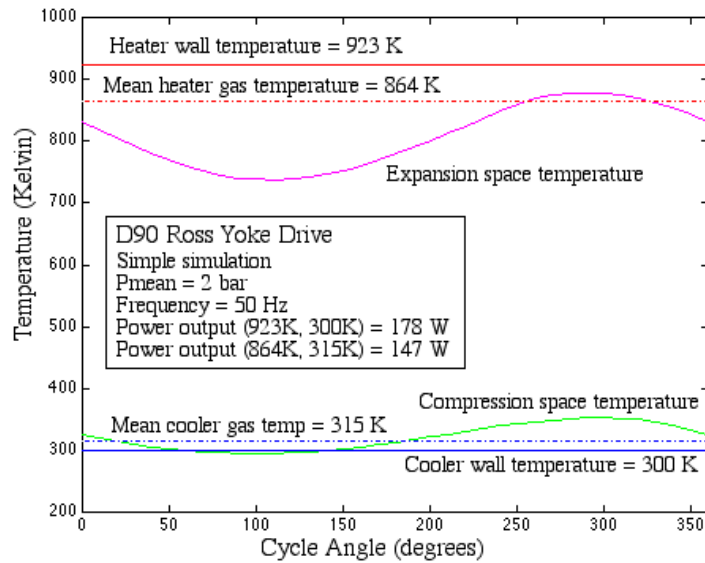


Figura 10: Modelo Simple - Diagrama Temperatura-Theta – Motor Ross D-90 [1]

3.4. Pérdidas de Presión

3.4.1. Pérdida de Trabajo por Pérdida de Presión

Hasta ahora se ha supuesto que en todo momento la presión es constante a lo largo de todo el motor. Sin embargo, el alto flujo de calor requerido en los intercambiadores de calor, a su vez, requieren que los mismos posean grandes superficies mojadas A_{wg} . Este requerimiento sumado al de mantener al mínimo los volúmenes muertos resultan en intercambiadores de calor con múltiples pasaje de fluido de pequeño diámetro y en paralelo. La fricción de fluido asociada con el flujo a través de los intercambiadores de calor producirá de hecho una caída de presión a través de cada uno de ellos que tiene el efecto de reducir la potencia de salida del motor. Esto se conoce como la "pérdida por bombeo" y en esta sección se intentará cuantificar esta pérdida de potencia.

En primer lugar, se evaluará la caída de presión a través de los tres intercambiadores de calor con respecto a la zona de compresión. Posteriormente se determinará el nuevo valor del trabajo realizado mediante integración durante todo el ciclo, aislando el término de pérdida por bombeo.

El trabajo total durante un ciclo resulta:

$$W = W_e + W_c = \oint p dV_c + \oint (p - \sum \Delta p) dV_e \quad (82)$$

donde la sumatoria $\sum \Delta p$ tiene en cuenta la caída de presión en los 3 intercambiadores de calor y en los 2 tubos de conexión, por lo tanto:

$$W = \oint p (dV_c + dV_e) - \oint \sum \Delta p dV_e = W_i - \Delta W \quad (83)$$

donde W_i es el trabajo indicado por ciclo obtenido del modelo Adiabático Ideal y ΔW es la pérdida de trabajo por ciclo debido a la caída de presión causada por la pérdida por bombeo. Finalmente, el término de trabajo perdido por bombeo se puede calcular como:

$$\Delta W = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=1}^5 \Delta p_j \frac{dV_e}{d\theta} \right) d\theta \quad (84)$$

3.4.2. Caída de Presión

La caída de presión Δp es debido a la fricción del fluido a medida que fluye a través de las secciones de los intercambiadores de calor y tubos de conexión. El modelo Simple ha asumido flujo unidimensional en todas partes, sin embargo, los conceptos fundamentales de las fuerzas de fricción no pueden ser tratadas como tal. Ley de viscosidad de Newton establece que la tensión de corte τ entre las capas adyacentes de fluido es proporcional al gradiente de velocidad (du/dz) existente entre estas capas normales a la dirección de flujo, como se muestra:

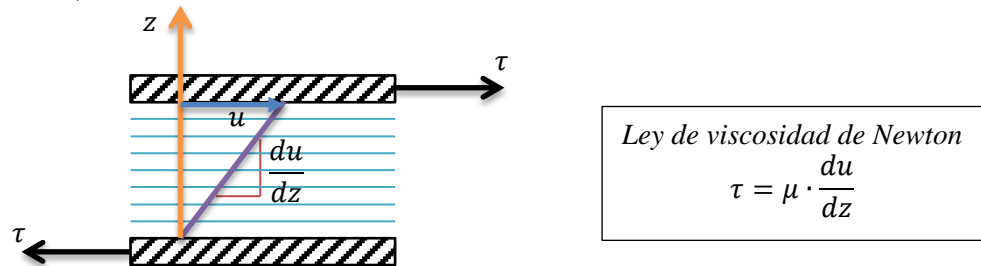


Figura 11: Ley de viscosidad de Newton

De la ecuación (Figura 11) se observa que un fluido newtoniano no puede sostener un esfuerzo de corte a menos que el flujo sea de dos dimensiones. Esta paradoja es anulada asumiendo que el flujo no es estrictamente unidimensional, sino más bien representado por su velocidad de flujo másico medio. La viscosidad dinámica μ es básicamente una medida de la fricción interna que se produce cuando las moléculas del fluido en una capa colisionan con las moléculas en las capas adyacentes que viajan a velocidades diferentes, y, al hacerlo transfieren su impulso.

En el rango de presión de interés, la viscosidad dinámica μ es independiente de la presión. Su dependencia con temperatura para los gases de interés se obtiene del siguiente diagrama.

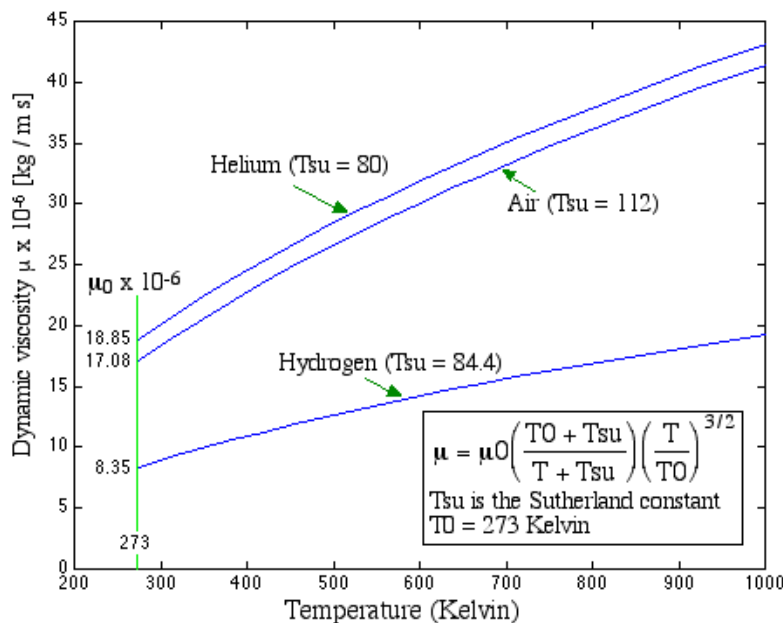


Figura 12: Formula de Sutherland para la viscosidad dinámica [1]

La viscosidad, así como otros parámetros que define el estado de cualquier gas, para prácticamente cualquier rango de presión y temperatura, pueden ser obtenidos de Ref. [11].

La fuerza de fricción F está relacionada con la tensión de corte de la forma:

$$F = \tau A_{wg} \quad (85)$$

donde A_{wg} es el área mojada de la pared de los intercambiadores de calor o tubos de conexión.

Para describir la pérdida por bombeo se introduce el concepto de "diámetro hidráulico", d , el cual relaciona las dos variables más importantes de un intercambiador de calor, el volumen V vacío y el área mojada A_{wg} :

$$d = 4 \frac{V}{A_{wg}} \quad (86)$$

De las dos ecuaciones anteriores:

$$F = 4 \tau \frac{V}{d} \quad (87)$$

Definiendo el Coeficiente de Fricción como:

$$C_f \equiv \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho u^2} \quad (88)$$

donde ρ es la densidad y u es la velocidad media del fluido¹. Sustituyendo τ se puede obtener la fuerza de fricción en términos del Coeficiente de Fricción:

$$F = 2 C_f \rho u^2 \frac{V}{d} \quad (89)$$

Asumiendo flujo cuasi-estacionario, es decir que no existen fuerzas de inercia producto de las aceleraciones del fluido, la fuerza de fricción es igual y opuesta a la fuerza por pérdida por presión, es decir:

$$F + \Delta p A = 0 \quad (90)$$

donde A es la sección transversal de pasaje del fluido. Sustituyendo F , la caída de presión resulta:

$$\Delta p + 2 C_f \rho u^2 \frac{V}{A d} = 0 \quad (91)$$

Tenga en cuenta que Δp puede ser positivo o negativo, dependiendo de la dirección del flujo. Sin embargo, el segundo término de esta ecuación es siempre positivo, y por lo tanto la ecuación viola el principio de conservación de la cantidad de movimiento al invertirse el flujo. Para resolver esto se define el "Coeficiente de Fricción de Reynolds" (C_{ref}) multiplicando el número de Reynolds por el coeficiente de fricción de la siguiente manera:

$$C_{ref} = N_{Re} C_f \quad (92)$$

donde $N_{Re} = \rho u d / \mu$ es el Número de Reynolds, el cual por definición, es siempre positivo, independientemente de la dirección del flujo. Finalmente:

$$\Delta p = -2 C_{ref} \mu u \frac{V}{A d^2} \quad (93)$$

Esta ecuación satisface el principio de conservación de la cantidad de movimiento tanto para flujo positivo o reversible, ya que el signo de Δp es siempre relacionado correctamente con el signo de la velocidad u . Dado que todos los datos empíricos actuales del Coeficiente de Fricción se presentan como una función del número de Reynolds, es simple convertir dichos datos para obtener el Coeficiente de Fricción de Reynolds. Por ejemplo, durante el último medio siglo han sido de uso intensivo las curvas de Coeficiente de Fricción vs número de

¹ $C_f = f/4$, siendo f el Factor de Fricción de Darcy según la definición del Cap. 6 de Ref. [12].

Reynolds para tubos circulares (Diagrama Moody). Estas curvas se han simplificado y reorganizado en términos de la Coeficiente de Fricción de Reynolds, C_{ref} , tal como se muestra en la Figura 13.

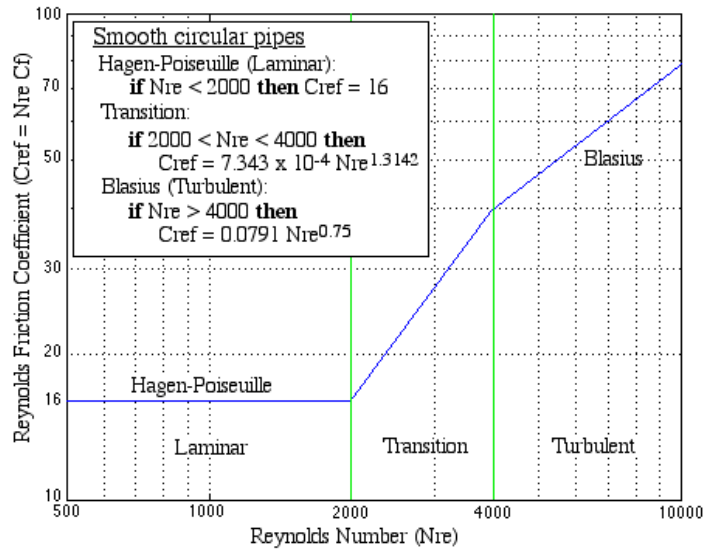


Figura 13: Diagrama de Moody en términos del Coeficiente de Fricción de Reynolds [1]

Para intercambiadores con matriz tipo malla de alambre se puede adoptar el Coeficiente de Fricción de Reynolds sugerido por Kays & London [16].

$$C_{ref} = 54 + 1.43 N_{Re}^{0.78} \tag{94}$$

Más recientemente otros autores han sugerido diferentes funciones dependientes no sólo del número de Reynolds sino también de la geometría de la malla^[13].

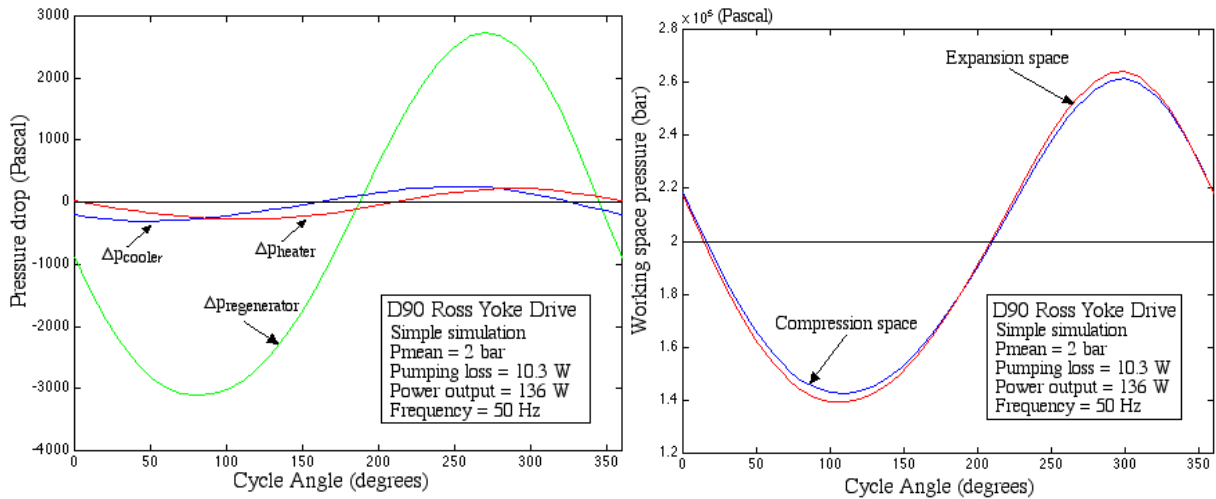


Figura 14: Modelo Simple – Efectos de las pérdidas por bombeo – Motor Ross D-90 [1]

En el ejemplo presentado en la Figura 14 se observa la gran pérdida de presión que ocurre en el regenerador respecto de los otros intercambiadores de calor. Se puede ver que la pérdida por bombeo (10.3 W) representa en este caso el 7.5% de la potencia de salida.

4. MEJORAS AL MODELO

Al Modelo Simple se le han incorporado las mejoras propuestas en Ref. [7] las cuales consisten en la incorporación del trabajo forzado y la efectividad del mecanismo.

4.1. Trabajo Forzado

El trabajo forzado, \bar{W} , es el trabajo que el mecanismo debe entregar al pistón para que se mueva en oposición a la diferencia de presión existente a través de él (Ref. [8]).

Como puede ver en la Figura 15 el trabajo forzado depende de la forma del ciclo y del valor de la presión en el cárter. Puede ser evaluado integrando el producto $(P - P_b) \cdot dV$ en la porción del ciclo donde este producto tiene signo negativo.

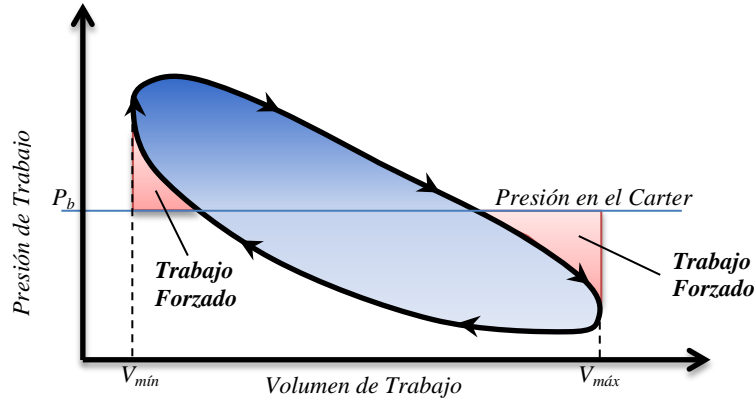


Figura 15: Trabajo Forzado para Presión de Carter Constante

$$\bar{W} = \oint [(P - P_b) \cdot dV] \quad (95)$$

Esta integral deberá ser resuelta en forma numérica. Una forma fácil numéricamente de obtener la parte negativa de una función es haciendo:

$$\bar{Z} = \frac{|Z| - Z}{2} \quad (96)$$

Aplicado a la integral (95) resulta:

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \oint [|(P - P_b) \cdot dV| - (P - P_b) \cdot dV] \quad (97)$$

4.2. Efectividad Mecánica

La efectividad mecánica del motor, E , es una medida de la cantidad de trabajo, producido por el ciclo termodinámico, que puede realmente ser tomado desde el eje para su uso fuera del motor.

Según la teoría de Senft ([7] y [8]), el trabajo en el eje por ciclo, W_s , puede ser calculado en términos del trabajo indicado (83) y el trabajo forzado (95) como:

$$W_s = E \cdot (W_i - \Delta W) - \left(\frac{1}{E} - E \right) \cdot \bar{W} \quad (98)$$

Para motores alternativos, el valor de la efectividad mecánica varía típicamente de 0.7 a 0.9 y es determinado generalmente mediante mediciones experimentales.

La potencia en el eje puede ser obtenida a partir del trabajo en el eje y la velocidad de rotación del motor (n en rpm):

$$\dot{W}_s = W_s \cdot \left(\frac{n}{60} \right) \quad (99)$$

Siendo $\dot{\theta} = 2 \cdot \pi \cdot 60/n$, el torque del motor puede ser expresado como:

$$\tau = \dot{W}_s / \dot{\theta} \quad (100)$$

Finalmente la eficiencia térmica puede ser calculada en función de la potencia en el eje y el calor real ingresado al motor:

$$\eta_t = W_s / Q_h \quad (101)$$

5. CINEMATICA DE MOTORES TIPO BETA Y GAMMA

Los motores tipo Beta y Gamma difieren del tipo Alpha en que la Zona de Compresión se modifica según el movimiento de los pistones desplazador y de compresión en conjunto (Figura 1). Por tal motivo la forma de variación de los volúmenes se vuelve un poco más compleja.

Seguidamente se presentan dos modelos, los cuales fueron utilizados en este estudio.

5.1. Cinemática Exacta

Consiste en modelar el motor según la geometría del mismo (Ref. [14]).

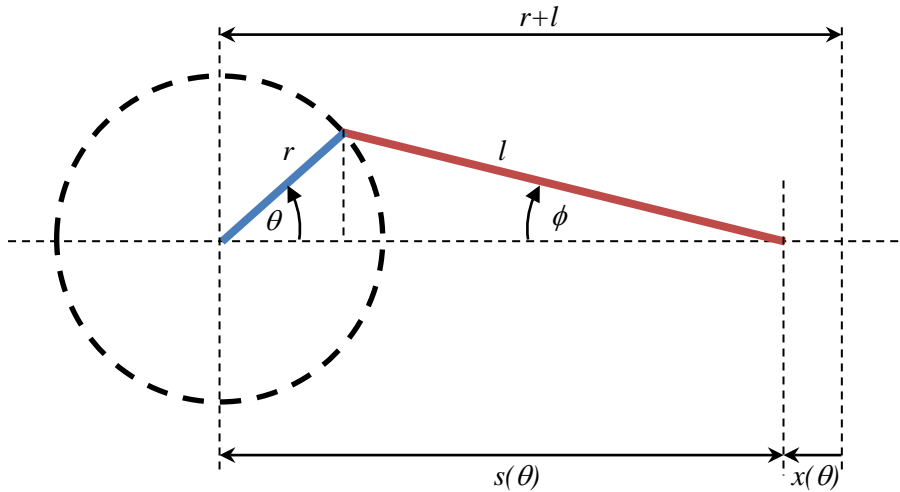


Figura 16: Geometría del Mecanismo Biela/Manivela

$x(\theta)$: Posición del pistón respecto del punto mórtice superior.

Haciendo uso de la nomenclatura de la Figura 16, se obtiene la ecuación de movimiento del pistón de la siguiente manera.

Siendo

$$x(\theta) + s(\theta) = r + l \quad (102)$$

$$x(\theta) = r + l - s(\theta) \quad (103)$$

La distancia del pistón al eje de rotación de la manivela puede ser obtenida haciendo:

$$s(\theta) = r \cdot \cos(\theta) + l \cdot \cos(\phi) \quad (104)$$

Con

$$l^2 = (l \cdot \cos(\phi))^2 + (r \cdot \sin(\theta))^2 \quad (105)$$

$$l \cdot \cos(\phi) = \sqrt{l^2 - (r \cdot \sin(\theta))^2} \quad (106)$$

La ecuación $s(\theta)$ puede ser escrita como:

$$s(\theta) = r \cdot \cos(\theta) + \sqrt{l^2 - (r \cdot \sin(\theta))^2} \quad (107)$$

Definiendo la relación manivela/biela como $\lambda = \frac{r}{l}$, la ecuación anterior puede ser escrita:

$$s(\theta) = r \cdot \cos(\theta) + l \cdot \sqrt{1 - (\lambda \cdot \sin(\theta))^2} \quad (108)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación de desplazamiento (103) se tiene:

$$x(\theta) = r + l - r \cdot \cos(\theta) - l \cdot \sqrt{1 - (\lambda \cdot \sin(\theta))^2} \quad (109)$$

$$x(\theta) = r(1 - \cos(\theta)) + l \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2(\theta)}\right) \quad (110)$$

La definición exacta del movimiento del pistón resulta finalmente:

$$x(\theta) = r \left[1 - \cos(\theta) + \frac{1}{\lambda} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2(\theta)}\right) \right] \quad (111)$$

Los volúmenes reales para un motor tipo Gamma se obtiene haciendo uso de la expresión anterior. Haciendo uso de la nomenclatura definida en §2.4-5, resultan:

$$V_e = V_{cl_e} + \frac{V_{sw_e}}{2} \cdot \left[1 - \cos(\theta + \phi) + \frac{1}{\lambda_e} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \lambda_e^2 \cdot \sin^2(\theta + \phi)}\right) \right] \quad (112)$$

$$V_c = V_{cl_c} + \frac{V_{sw_e}}{2} \cdot \left[1 + \cos(\theta + \phi) - \frac{1}{\lambda_e} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \lambda_e^2 \cdot \sin^2(\theta + \phi)}\right) \right] \quad (113)$$

$$+ \frac{V_{sw_c}}{2} \cdot \left[1 - \cos(\theta) + \frac{1}{\lambda_c} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \lambda_c^2 \cdot \sin^2(\theta)}\right) \right]$$

Siendo ϕ el desfase entre los movimientos de los pistones.

Por otro lado, la variación del cambio de volumen por ángulo de rotación:

$$\frac{dV_e}{d\theta} = \frac{V_{sw_e}}{2} \cdot \left(\sin(\theta + \phi) + \frac{\lambda_e \cdot \sin(\theta + \phi) \cdot \cos(\theta + \phi)}{\sqrt{1 - \lambda_e^2 \cdot \sin^2(\theta + \phi)}} \right) \quad (114)$$

$$\frac{dV_c}{d\theta} = -\frac{dV_e}{d\theta} + \frac{V_{sw_c}}{2} \cdot \left(\sin(\theta) + \frac{\lambda_c \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)}{\sqrt{1 - \lambda_c^2 \cdot \sin^2(\theta)}} \right) \quad (115)$$

5.2. Cinemática Sinusoidal Aproximada

Si el valor de la relación λ es pequeña los volúmenes (112) y (113) pueden ser aproximados como:

$$V_e \approx V_{cl_e} + \frac{V_{sw_e}}{2} \cdot [1 - \cos(\theta + \phi)] \quad (116)$$

$$V_c \approx V_{cl_c} + \frac{V_{sw_e}}{2} \cdot [1 + \cos(\theta + \phi)] + \frac{V_{sw_c}}{2} \cdot [1 - \cos(\theta)] \quad (117)$$

Urieli [1], propone modificar las dos ecuaciones anteriores para representarlas como la cinemática de un motor tipo Alpha y que puedan ser expresadas en forma análoga a la mostrada en §2.4-5. Para ello se propone:

$$V_c = A + \frac{B}{2} \cdot [1 - \cos(\theta + \delta)] \quad (118)$$

Comparando las expresiones (57) y (118) para valores de $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$, se tiene:

$$B = \sqrt{V_{sw_e}^2 - 2 \cdot V_{sw_e} \cdot V_{sw_c} \cdot \cos(\phi) + V_{sw_c}^2} \quad (119)$$

$$A = V_{cl_c} + \frac{V_{sw_e}}{2} + \frac{V_{sw_c}}{2} - \frac{B}{2} \quad (120)$$

$$\delta = \arctan \left(\frac{V_{sw_e} \cdot \sin(\phi)}{V_{sw_e} \cdot \cos(\phi) - V_{sw_c}} \right) \quad (121)$$

Finalmente se puede escribir las ecuaciones simplificadas de volumen de un motor tipo Beta o Gamma como si fuera un tipo Alpha (Ec. (57) a (60)):

$$V_c = A + \frac{B}{2}(1 - \cos(\theta)) \quad (122)$$

$$V_e = V_{cle} + \frac{V_{swe}}{2}(1 - \cos(\theta + \alpha)) \quad (123)$$

$$\frac{dV_c}{d\theta} = \frac{B}{2} \sin(\theta) \quad (124)$$

$$\frac{dV_e}{d\theta} = \frac{V_{swe}}{2} \sin(\theta + \alpha) \quad (125)$$

siendo $\alpha = \phi - \delta$ el desfase de volumen para los motores tipo Beta o Gamma.

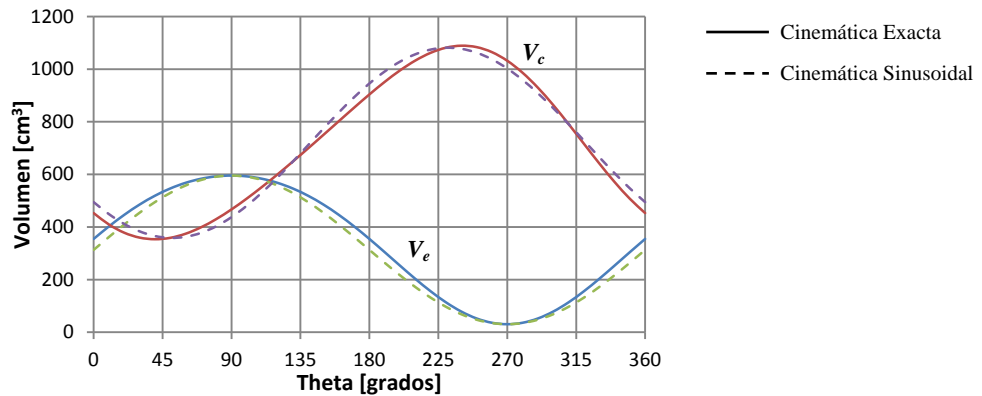


Figura 17: Comparación de Modelos Cinemáticos – Motor ST05G

6. RESULTADOS

La metodología de cálculo aquí presentada fue automatizada en un programa en lenguaje Fortran denominado STSimple. Para las corridas se tomó como base una temperatura exterior de 290 K para la zona fría y 840 K para la zona caliente. La presión media adoptada fue de 3 Bar y las rpm de 432 (7.2 Hz).

6.1. Validación de Resultados

Seguidamente se presenta los resultados obtenidos con el programa STSimple comparado con el programa sea.m [1], corridos para el motor tipo Gamma ST05G [15].

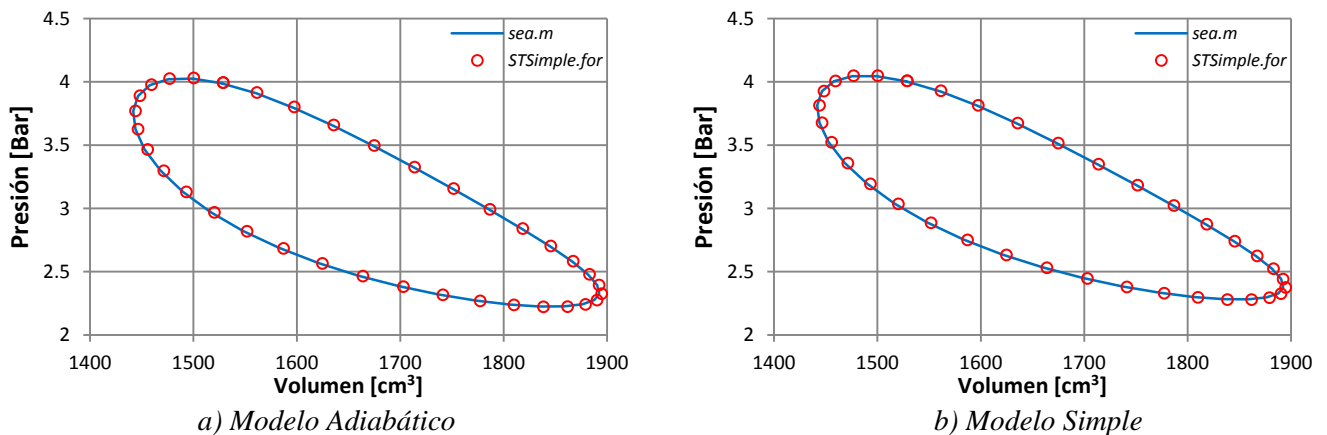


Figura 18: Motor ST05G – Diagrama V-p – Validación Resultados Programa STSimple.for vs. sea.m [1]

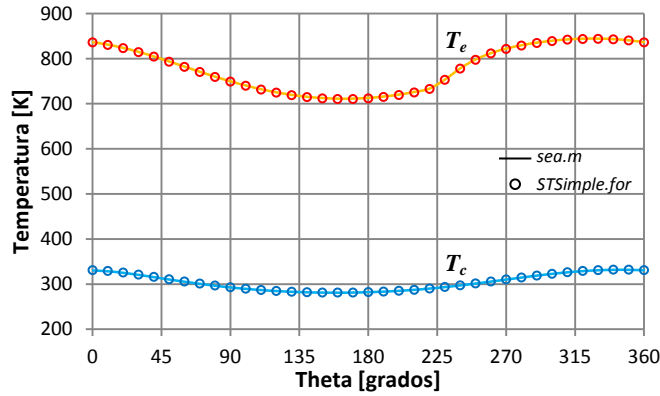


Figura 19: Motor ST05G – Temperatura – Validación Resultados Programa STSimple.for vs. sea.m [1]

6.2. Otros Resultados

6.2.1. Comparación de Modelos Cinemáticos

En la Figura 20 se presenta el diagrama V-p para dos corridas de STSimple, en el cual se puede ver la diferencia que se obtiene corriendo con los dos modelos cinemáticos presentados en §5.

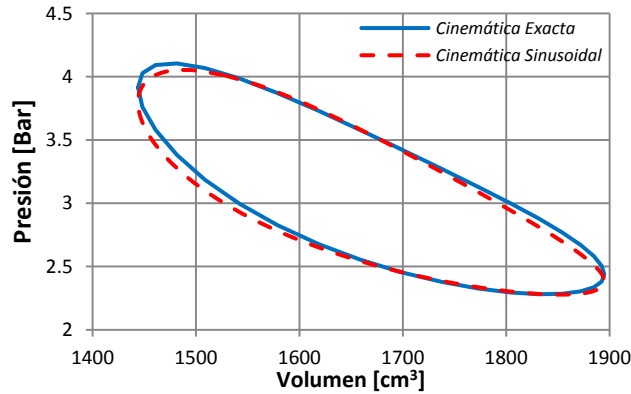


Figura 20: Motor ST05G – Diagrama V-p – Comparación de Modelos Cinemáticos

En este caso, la diferencia en el trabajo termodinámico es menor a 0.1%. Debido a que se observa poca diferencia entre los resultados obtenidos por ambos modelos, se adopta la cinemática sinusoidal aproximada para la versión final del programa STSimple, ya que permite obtener prácticamente los mismos resultados con menor cantidad de datos de entrada.

6.2.2. Variación de la Potencia con la Presión de Trabajo

En la Figura 21 se puede observar la variación de las diferentes potencias con la presión de trabajo. La Potencia Adiabática es la potencia termodinámica obtenida con el Modelo Adiabático §2. La Potencia Simple, es la potencia termodinámica obtenida con el Modelo Simple §3. La Potencia Senft es la potencia en el eje obtenida mediante la teoría de Senft §4.2., asumiendo $E = 0.75$ [7].

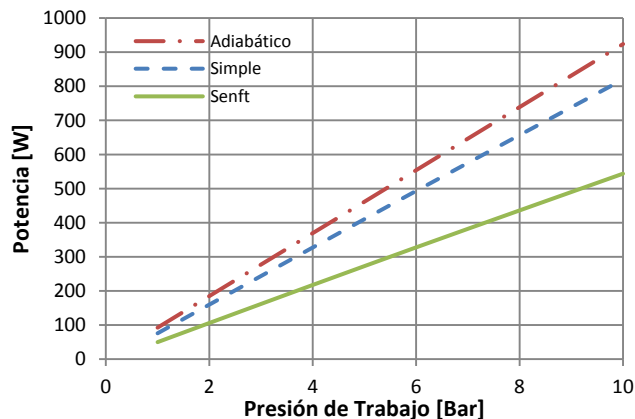


Figura 21: Motor ST05G – Potencia para Diferentes Modelos de Cálculo

7. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un modelo de cálculo de performances de motores Stirling, para cualquiera de sus tipos, Alpha, Beta o Gamma.

La metodología de cálculo propuesta fue automatizada en el programa, en lenguaje Fortran, denominado STSimple.for. El programa fue validado utilizando programas similares de reconocidos autores.

Esta herramienta de cálculo será usada para interpretar los resultados de ensayos del motor tipo Gamma que se encuentra desarrollando en el Departamento Mecánica Aeronáutica del Instituto Universitario Aeronáutico, dentro de los programas de desarrollo Intihuasi patrocinado por el MinCyT y PIDDEF 037/12 de MinDef.

8. REFERENCIAS

- [1] Israel Urieli, “Stirling Cycle Machine Analysis”, Set-2016. <https://www.ohio.edu/mechanical/stirling/>
- [2] Yunus A. Cengel, Michael A. Boles, “Thermodynamics: An Engineering Approach”, McGraw-Hill; Fifth edition, ISBN-10: 0070606595, 2006.
- [3] Siegfried Herzog, “Ideal Adiabatic Simulation of Stirling Engines”, Set-2016. <http://zigherzog.net/stirling/simulations/IdealAdiabatic/>
- [4] J.E. Hesselgraves, “Compact Heat Exchangers – Selection, Design and Operation”, Elsevier Science & Technology Books, ISBN: 0080428398, Jan-2001.
- [5] H. Snyman, T.M. Harms y J.M Staruss, “Design analysis methods for Stirling engines”, University of Stellenbosch, Journal of Energy in Southern Africa - Vol 19 No 3, South Africa, August 2008, <http://www.scielo.org.za/pdf/jesa/v19n3/02.pdf>
- [6] Parque Solar Termoeléctrico Intihuasi, Set-2016, http://www.iua.edu.ar/prensa/periodico/pdf/2011/gacetilla06_11.pdf
- [7] S. Alfarawi, R. AL-Dadah, S. Mahmoud, “Enhanced thermodynamic modelling of a gamma-type Stirling engine”, Department of Mechanical Engineering, University of Birmingham, Edgbaston B15 2TT, UK., Applied Thermal Engineering 106 (2016), <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431116310584>
- [8] James R. Senft, “Mechanical Efficiency of Heat Engine”, University of Wisconsin–River Falls, Cambridge University Press, ISBN: 9780521868808, Aug-2007, www.cambridge.org/9780521868808
- [9] Andy Ross, “Making Stirling Engines”, Ross Experimental, 3er Edition, Jun-1997. <http://www.stirlingbuilder.com/>
- [10] Theodor Finkelstein y Allan J Organ, “Air Engines - The History, Science, and Reality of the Perfect Engine”, The American Society of Mechanical Engineers, New York, ISBN 0-7918-0171-3, 2001.
- [11] Gustavo Scarpin, “Cálculo de las Propiedades de Mezclas de Gases en Equilibrio Termodinámico - Aplicación A Flujos No Viscosos”, Tesis de Maestría en Ciencias de la Ingeniería – Mención Aeroespacial, UNC-IUA, 2006.
- [12] Frank M. White, “Fluid Mechanics, 5th Edition”, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, Nov-2002. ISBN-10: 0072402172.
- [13] Richard A. Wirtz, “High Performance Woven Mesh Heat Exchange”, University of Nevada-Mechanical Engineering Department, Reno, April-2003.
- [14] Andreas Wagner, “Calculations and experiments on γ -type Stirling engines”, Thesis, University of Wales, Cardiff, March 2008. <http://orca.cf.ac.uk/54057/1/U585566.pdf>
- [15] Stirlingmotor ST 05 G, Gammatyp 0,3 – 0,5 kW, 2016, http://www.ve-ingenieure.de/projekt_st05g_cnc.html
- [16] W. M. Kays, A. L. London, “Compact Heat Exchangers”, Krieger Pub Co; 3 Sub edition, Jan. 1998.