



4^{to} Congreso Argentino de Ingeniería Aeronáutica



ANÁLISIS DE VIGAS DE SECCIÓN ARBITRARIA SOMETIDAS A ESFUERZOS DE TORSIÓN Y CORTE: CONDICIONES DE SIMETRÍA

A. T. Brewer^a, F. G. Flores^{a,b}, B. A. Roccia^{a,b}, y S. Preidikman^{a,b}

^a Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales – Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, CP 5000, Córdoba, Argentina, <http://www.efn.uncor.edu>

^b Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) UNC- CONICET, <http://www.inv.idit.efn.uncor.edu>

Palabras claves: Vigas, Torsión, Tensiones de Corte por Corte, Elementos Finitos, Simetría.

Resumen

El diseño de vigas utilizando elementos unidimensionales formulados en el marco del Método de Elementos Finitos (MEF) requiere la caracterización de las propiedades de la sección: el área, los momentos y productos de inercia, el momento de inercia polar y el área de corte (que se corresponden con los esfuerzos normales, de flexión, torsión y corte respectivamente). Además, conjuntamente con estos objetivos se encuentra la determinación del estado tensional de la sección. En estructuras aeronáuticas son de particular interés las secciones de pared delgada y las configuraciones de una o varias celdas. Los primeros trabajos, realizados por distintos autores, utilizaron diversos métodos que se particularizaban según el esfuerzo (torsión o corte) y según la sección (sólida, delgada abierta, delgada cerrada de una celda, o delgada de varias celdas). En un trabajo previo, presentado, en dos partes, en el 3er CAIA bajo los títulos: *Análisis de Vigas de Sección Arbitraria Sometidas a Tensiones de Corte Causadas por Esfuerzos de Torsión y Corte: Parte 1–Formulación Teórica y Parte 2–Formulación Mediante Elementos Finitos*, se mostró la teoría (siguiendo a W. D. Pilkey) y la aplicación a distintos ejemplos, según un enfoque que no separa la formulación según cada tipo de sección (sólida, delgada abierta, cerrada, etc.). Los resultados, ya sea en estructuras sólidas como delgadas, sometidas a esfuerzos de torsión o corte, mostraron excelente correspondencia con análisis realizados utilizando otras aproximaciones. La formulación permite analizar secciones transversales de cualquier forma, y determinar sus propiedades geométricas (centro de gravedad, momentos y productos de inercia, momento de inercia polar y centro de corte), como así también la distribución de las tensiones de corte, tanto las producidas por torsión como las provocadas por corte. Con estos resultados es posible caracterizar el área de corte, valor imprescindible si se quiere utilizar modelos de viga de Timoshenko. El presente trabajo completa lo realizado previamente y presenta las condiciones que deben satisfacer, en los planos de simetría, las funciones que definen el alabeo (para la torsión) y las funciones que determinan las tensiones de corte (corte por corte), según las dos direcciones. Asimismo, se muestran ejemplos que corroboran las condiciones de simetría propuestas.

1. INTRODUCCIÓN

El diseño de vigas utilizando elementos unidimensionales formulados en el marco del Método de Elementos Finitos (MEF) requiere la caracterización de la rigidez de la sección, que depende del material, de las propiedades geométricas de la misma y del tipo de esfuerzo a que se encuentra sometida la estructura. Entre las propiedades geométricas de la sección se encuentran el área, los momentos de inercia, el momento de inercia polar y el área de corte y se corresponden con los esfuerzos normales, de flexión, torsión y corte respectivamente. Además, de la mano de estos objetivos se encuentra la determinación de estado tensional de la pieza.

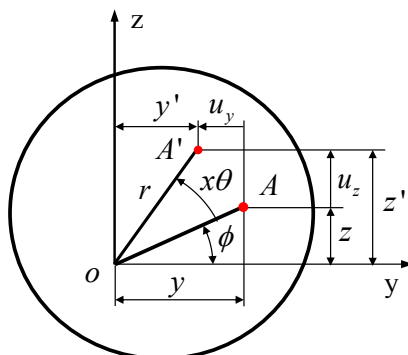
En estructuras aeronáuticas son de particular interés las secciones de pared delgada y las configuraciones de una o varias celdas. El enfoque utilizado en los primeros trabajos, con el objeto de resolver las cuestiones de secciones sometidas a torsión y corte, se relaciona con los conocidos como métodos de las fuerzas, [1, 2, 3, 4, 5]. La teoría se particulariza según la sección sea sólida, delgada abierta, de una celda, o de varias celdas. A su vez, se consideran separadamente los comportamientos bajo cargas de torsión y de corte. En este trabajo, en primer lugar, se muestra la formulación de la teoría de Saint Venant aplicada a esfuerzos de torsión, según lo presentado en [6]. En segundo lugar, siguiendo al mismo autor, se describe la teoría presentada para determinar las tensiones de corte producidas por cargas transversales al eje de la estructura. La formulación hace uso de la teoría de la elasticidad y se particulariza al caso de una viga en voladizo. No obstante, los resultados obtenidos pueden ser aplicados a secciones transversales de cualquier forma. Los resultados de ambas formulaciones permiten caracterizar los valores de las tensiones de corte, del momento de inercia polar para secciones de forma arbitraria y la posición del centro de corte. Conocidas las tensiones de corte, se pueden calcular los coeficientes para ponderar las áreas de corte, coeficientes que resultan necesarios si se quiere modelar vigas siguiendo la teoría de Timoshenko [7].

En el presente trabajo se establecen las condiciones que deben satisfacer, en los planos de simetría (casos simétricos y antisimétricos), las funciones que definen el alabeo (para la torsión) y las funciones que determinan las tensiones de corte (corte por corte). En este sentido se completa la formulación general expuesta en presentaciones anteriores [8, 9]. Finalmente, se muestran ejemplos que corroboran las condiciones de simetría propuestas.

2. VIGAS EN TORSIÓN

Cuando una sección está sometida a torsión, se puede asumir la hipótesis de Saint Venant [6], según la cual la sección de la viga sujeta a torsión pura, sin restricción al alabeo, rota alrededor del eje de giro de tal forma que si bien los puntos de dicha sección puede desplazarse en la dirección del eje x , su proyección sobre el plano original retiene su forma original. El eje de giro pasa por el centro de giro de la sección, punto que no sufre desplazamientos en las direcciones y, z . El giro es $x\theta$ donde x es la distancia desde una sección que no gira a la sección considerada y θ el ángulo de giro por unidad de longitud (constante). A partir de estas hipótesis, para pequeños giros, los desplazamientos de un punto A de la sección, ver fig. 1, resultan:

$$u_y = -xz\theta \quad ; \quad u_z = xy\theta \quad (1)$$



$$u_y = y' - y = r [\cos(\phi + x\theta) - \cos(\phi)]$$

$$u_z = z' - z = r [\sin(\phi + x\theta) - \sin(\phi)]$$

Figura 1: Desplazamientos de la sección sometida a torsión.

Para el desplazamiento de los puntos de la sección según la dirección x , existe evidencia experimental que indica que el desplazamiento axial de cada sección a lo largo de la barra es prácticamente la misma y se adopta la

siguiente expresión:

$$u_x = \theta \omega(y, z) \quad (2)$$

Es decir, que el desplazamiento es proporcional al giro por unidad de longitud θ y a la función $\omega(y, z)$ que es desconocida y recibe el nombre de función de alabeo. Bajo la condición de torsión pura, se asume que $\theta = cte$ y las componentes del tensor de deformaciones resultan

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \quad \text{y} \quad \gamma_{xy} = \theta(-z + \omega_{,y}) \quad ; \quad \gamma_{xz} = \theta(y + \omega_{,z}) \quad (3)$$

donde, $\varepsilon_i = u_{i,i} = \partial u_i / \partial i$ con $(i = x, y, z)$ y $\gamma_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$ con $(i, j = x, y, z \wedge i \neq j)$

Las correspondientes tensiones se escriben como

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \quad \text{y} \quad \tau_{xy} = G\theta(-z + \omega_{,y}) \quad ; \quad \tau_{xz} = G\theta(y + \omega_{,z}) \quad (4)$$

Y las ecuaciones de equilibrio resultan,

$$\sigma_{x,x} + \tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} + f_x = 0 \quad ; \quad \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{zy,z} + f_y = 0 \quad ; \quad \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + f_z = 0 \quad (5)$$

que conducen a (siendo las fuerzas por unidad de volumen $f_x = f_y = f_z = 0$)

$$\nabla^2 \omega(y, z) = 0 \quad ; \quad \tau_{xy,x} = 0 \quad \text{y} \quad \tau_{xz,x} = 0 \quad (6)$$

En las ec. (6), la primera establece que la función de alabeo satisface la ecuación de Laplace en todo punto de la sección y las dos últimas, indican que la distribución de las tensiones (τ_{xy}, τ_{xz}) es la misma en todas las secciones transversales.

Las condiciones de borde se establecen a partir de las siguientes relaciones entre el tensor de tensiones en la superficie y las componentes de las fuerzas por unidad de superficie (p_x, p_y, p_z) actuando en la misma:

$$n_x \sigma_x + n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx} = p_x \quad ; \quad n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \tau_{zy} = p_y \quad ; \quad n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_z = p_z \quad (7)$$

Reemplazando (4) en (7), y teniendo en cuenta que en la cara lateral $(n_x = 0 \text{ y } p_x = p_y = p_z = 0)$, las dos últimas ecuaciones (7) se satisfacen idénticamente, y de la primera resulta

$$n_y (\omega_{,y} - z) + n_z (\omega_{,z} + y) = 0 \quad (8)$$

Cuando se consideran las superficies asociadas con las caras anterior y posterior, $(n_x = \pm 1)$ y $(n_y = n_z = 0)$, de lo cual resulta en las ecuaciones (7)

$$\pm \tau_{xy} = p_y \quad \text{y} \quad \pm \tau_{xz} = p_z \quad (9)$$

Es decir, que las fuerzas por unidad de superficie que generan la torsión tienen la misma distribución que las tensiones en todas las secciones. En consecuencia se debe satisfacer

$$M_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = G\theta \int_A [(\omega_{,z} + y)y - (\omega_{,y} - z)z] dA = GJ\theta \quad (10)$$

de la que se desprende que

$$J = \int_A [(\omega_{,z} + y)y - (\omega_{,y} - z)z] dA \quad (11)$$

Las tensiones se calculan a partir de las ecuaciones (4) y (10)

$$\tau_{xy} = M_x (\omega_{,y} - z) / J \quad ; \quad \tau_{xz} = M_x (\omega_{,z} + y) / J \quad (12)$$

2.1. Secciones con simetría geométrica sometidas a torsión

Cuando una sección geoméricamente simétrica se somete a un momento torsor, los desplazamientos y tensiones presentan componentes antisimétricas respecto del plano de simetría.

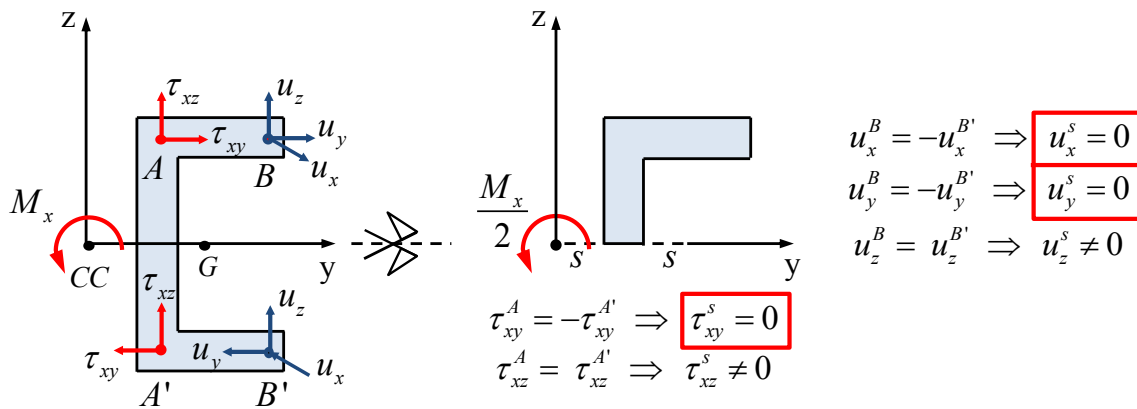


Figura 2: Sección simétrica sometida a torsión

En la figura 2 se han esquematizado los puntos A y B y sus correspondientes puntos simétricos A' y B'. En los puntos A y A' se han representado las tensiones y en los puntos B y B' los desplazamientos. Aquellas componentes del desplazamiento (puntos B y B') o de la tensión (puntos A y A') que sean opuestas, se anularán en el plano de simetría. Surgen así las siguientes restricciones:

$$u_x^s = 0 \quad ; \quad u_y^s = 0 \quad ; \quad \tau_{xy}^s = 0 \tag{13}$$

En relación a las ec. (13), se observa que:

1. Sobre el eje de simetría $z = 0$, y en consecuencia inmediatamente se satisface $u_y^s = 0$, ver ec. (1).
2. De la ec. (2), se observa que $u_x^s = 0$ sólo si:

$$\omega(y, 0) = 0 \tag{14}$$

por lo que esta condición de borde (del tipo esencial en un modelo de elementos finitos) debe imponerse en todo punto sobre el eje de simetría.

3. Por último, si se satisface $\omega(y,0)=0$, entonces resulta $\omega_{,y}(y,0)=0$, y dado que $z = 0$, se cumple la tercera condición que establece que $\tau_{xy}^s = 0$ (ver ec.(4)).

Similares conclusiones se obtienen si el eje de simetría coincide con el eje z: la función de alabeo ω debe anularse sobre este eje.

3. VIGAS SOMETIDAS A ESFUERZOS DE CORTE Y FLEXIÓN

En la Figura 3 se muestra una viga prismática y homogénea en voladizo cuya sección ubicada en la posición x está sometida a esfuerzos de corte y flexión, [6]. Las fuerzas de corte actúan en el centro de corte.

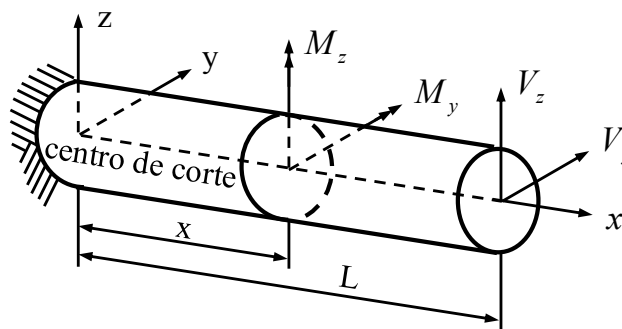


Figura 3: Viga sometida a esfuerzos de corte y flexión.

La expresión que permite encontrar las tensiones normales a partir de los momentos flectores aplicados, [4], es:

$$\sigma_x = \left[\frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - (I_{yz})^2} \right] z - \left[\frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{I_y I_z - (I_{yz})^2} \right] y \quad (15)$$

En la ec. (15), las coordenadas y , z , como así también los momentos y productos de inercia se calculan respecto del centroide de la sección.

3.1. Análisis bajo carga V_z

Cuando se considera solamente la carga V_z la anterior se reduce a

$$\sigma_x = \left[\frac{M_y I_z}{I_y I_z - (I_{yz})^2} \right] z - \left[\frac{M_y I_{yz}}{I_y I_z - (I_{yz})^2} \right] y = B(L-x)(I_{yz} y - I_z z) \quad (16)$$

donde, $B = V_z / (I_y I_z - I_{yz}^2)$. Las ecuaciones de equilibrio (5), asumiendo que no existen fuerzas por unidad de volumen y que las tensiones que garantizan el equilibrio son σ_x , τ_{xy} , y τ_{xz} resultan:

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0 \quad ; \quad \tau_{xy,x} = 0 \quad ; \quad \tau_{xz,x} = 0 \quad (17)$$

Reemplazando la ecuación (16) en la primera de las ecuaciones (17), se tiene:

$$\tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = B(I_{yz} y - I_z z) \quad (18)$$

Las dos últimas ecuaciones en (17) indican que la distribución de las tensiones de corte en las secciones no varían con la coordenada x , es decir que dichas tensiones sólo son funciones de las coordenadas y y z . Las ecuaciones constitutivas permiten escribir las deformaciones en términos de las tensiones, esto es:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad ; \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \quad ; \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad ; \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (19)$$

Estas deformaciones satisfacen idénticamente las ecuaciones de compatibilidad, salvo las dos siguientes:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \quad \text{y} \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) \quad (20)$$

Reemplazando las ecuaciones (19) en las (20) y luego utilizando la (16), resultan

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\nu}{(1+\nu)} I_z B \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\nu}{(1+\nu)} I_{yz} B \quad (21)$$

El próximo paso es proponer que las tensiones τ_{xy} y τ_{xz} se expresen en término de una función $\Phi(y, z)$, con derivadas terceras continuas, esto es, $\Phi(y, z) \in C^3$, y elegida de tal modo que se satisfagan idénticamente las ecuaciones (21):

$$\tau_{xy} = \frac{V_z}{\Delta} (\Phi_{,y} - h_y) \quad \text{y} \quad \tau_{xz} = \frac{V_z}{\Delta} (\Phi_{,z} - h_z); \quad \text{donde} \quad (22)$$

$$\Delta = 2(1+\nu) \left[I_y I_z - (I_{yz})^2 \right] \quad ; \quad h_y = \nu \left(I_z y z - I_{yz} \frac{y^2 - z^2}{2} \right) \quad \text{y} \quad h_z = -\nu \left(I_{yz} y z + I_z \frac{y^2 - z^2}{2} \right) \quad (23)$$

Entonces, reemplazando la (22) en (18) resulta la ecuación diferencial que gobierna a $\Phi(y, z)$:

$$\nabla^2\Phi(y,z) = 2(I_{yz}y - I_zz) \quad (24)$$

La condición de borde es idéntica a la primera de las presentadas en la ecuación (7) en la cara lateral

$$n_y\tau_{yx} + n_z\tau_{zx} = 0 \quad \text{ó} \quad \mathbf{n} \cdot \nabla\Phi(y,z) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h} \quad \text{con} \quad \mathbf{h} = [h_y, h_z] \quad (25)$$

La solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales dada en (24) con las condiciones de borde dadas por (25), permite encontrar la relación entre la fuerza de corte y las tensiones de corte mostradas en (22). Si bien el resultado se obtuvo a partir de un caso particular, el mismo es completamente general para secciones homogéneas de forma arbitraria.

3.2. Análisis bajo la carga V_y

Para esta carga, los pasos son idénticos a los seguidos en el caso de la carga V_z y conducen a las siguientes relaciones entre la carga y la tensión

$$\tau_{xy} = \frac{V_y}{\Delta}(\Psi_{,y} - d_y) \quad \text{y} \quad \tau_{xz} = \frac{V_y}{\Delta}(\Psi_{,z} - d_z) \quad (26)$$

donde,

$$d_y = v \left(I_y \frac{y^2 - z^2}{2} - I_{yz}yz \right) \quad ; \quad d_z = v \left(I_y yz + I_{yz} \frac{y^2 - z^2}{2} \right) \quad (27)$$

La ecuación diferencial en la sección Ω , y las condiciones en el borde en Γ que gobiernan a la función $\Psi(y,z)$ tienen la forma:

$$\nabla^2\Psi(y,z) = 2(I_{yz}z - I_yy) \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{y} \quad \mathbf{n} \cdot \nabla\Psi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \quad \text{en} \quad \Gamma \quad (28)$$

3.3. Condiciones de simetría para secciones bajo cargas de corte

A continuación se analizan secciones que presentan simetría geométrica, agrupando los casos según la carga actuante. Se distinguen las siguientes situaciones:

3.3.1. Secciones bajo carga simétrica

La Figura 4 muestra la situación para carga actuante según la dirección y

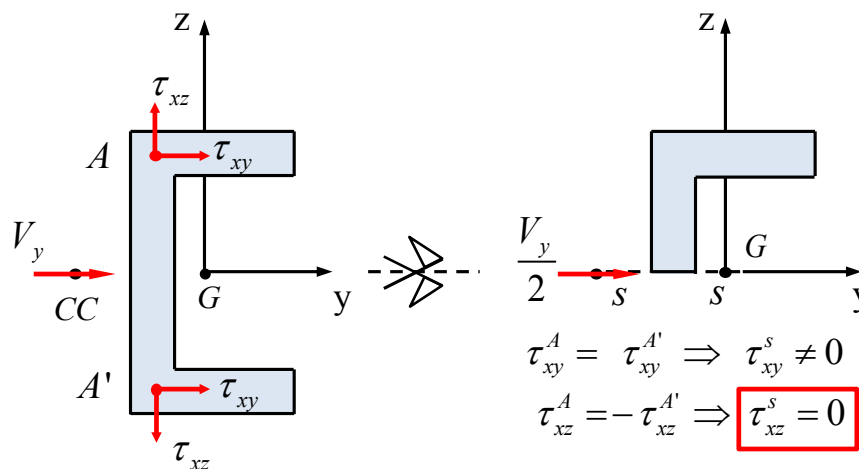


Figura 4: Carga simétrica según el eje y

La Figura 5 muestra la situación para carga actuante según la dirección z

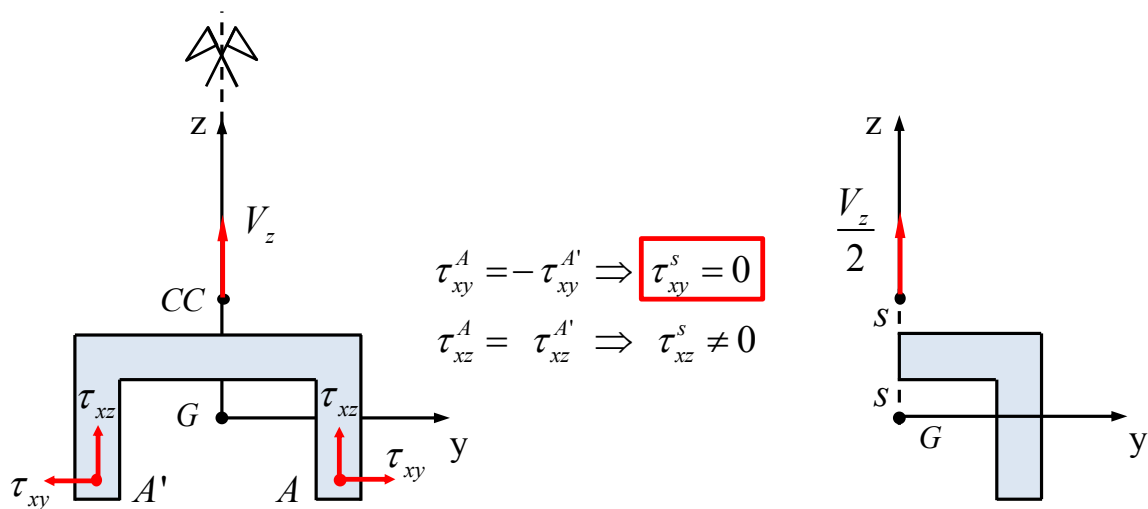


Figura 5: Carga simétrica según el eje z

De las Figuras 4 y 5 se concluye que desde el punto de vista de la mecánica, la condición de simetría considerada implica que la componente de tensión de corte normal al plano de simetría debe ser nula, es decir

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \tau_n = 0 \quad \text{en } \Gamma_s \quad (29)$$

La condición de borde para las caras laterales surge de las ec. (7), que de acuerdo con la primera de las ec. (4) y recordando que $n_x = 0$ y $p_x = p_y = p_z = 0$, se reduce a

$$n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx} = 0 \quad (30)$$

Dado que la ec. (29) (que surge como condición sobre el plano de simetría) y la ec. (30) (que es la condición de borde general para secciones bajo carga de corte) son idénticas, se concluye que para estructuras geoméricamente simétricas, cargadas simétricamente se puede analizar la mitad simétrica sin necesidad de imponer condiciones de borde adicionales. Esto significa que las secciones simétricas con carga simétrica actúan como si fueran secciones independientes aun cuando permanecen unidas.

3.3.2. Secciones bajo carga antisimétrica

La Figura 6 muestra la situación para carga actuante según la dirección y

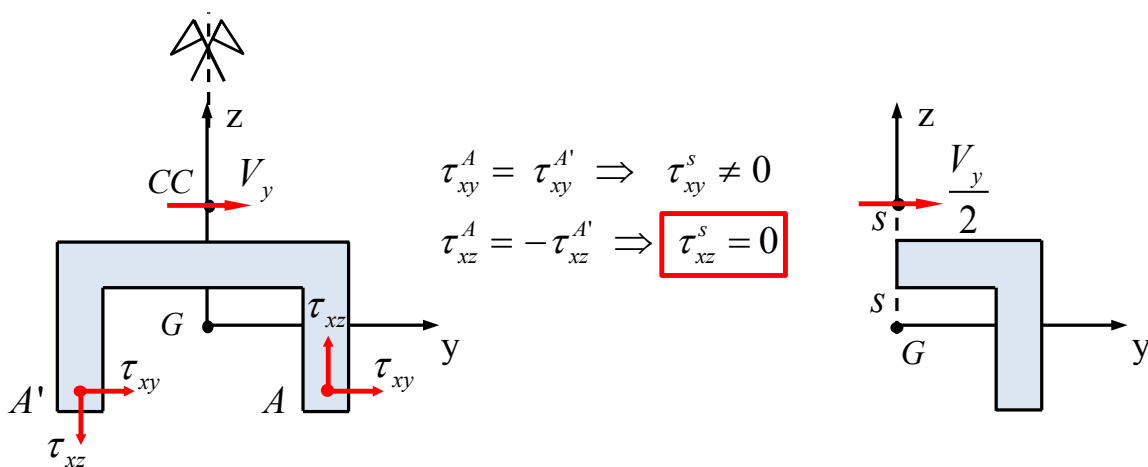


Figura 6: Carga antisimétrica según el eje y

La Figura 7 muestra la situación para carga actuante según la dirección z

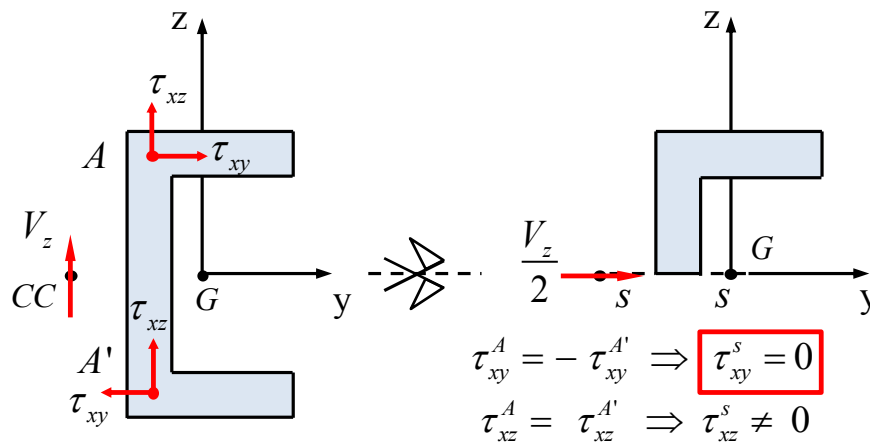


Figura 7: Carga antisimétrica según el eje z

De las Figuras 6 y 7 se concluye que desde el punto de vista de la mecánica, la condición de simetría considerada implica que la componente de tensión de corte tangencial al plano de simetría debe ser nula, es decir

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{s} = \tau_s = 0 \quad \text{en } \Gamma_s \quad (31)$$

Con el objeto de evidenciar las consecuencias de la ec. (31), se analizan a continuación sus implicancias en cada uno de los casos representados en las figuras 6 y 7. La ec. (31) se expande como

$$s_y \tau_{yx} + s_z \tau_{zx} = 0 \quad \text{en } \Gamma_s \quad (32)$$

y para el estado de carga en la Figura 6, siendo $s = (0 ; -1)$, se simplifica en

$$\tau_{zx} = 0 \quad \text{en } \Gamma_s \quad (33)$$

Además, dada la simetría de la sección, $I_{yz} = 0$ y que sobre el plano de simetría $y = 0$, la segunda de las ec. (26) se simplifica y la (33) resulta en

$$\tau_{zx} = \frac{V_y}{\Delta} (\Psi_{,z} - d_z) = \frac{V_y}{2(1+\nu)I_y I_z} \Psi_{,z} = 0 \quad \text{en } \Gamma_s \quad (34)$$

Entonces, para que la componente τ_{zx} se anule sobre el plano de simetría, debe cumplirse

$$\Psi_{,z} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0 \Rightarrow \Psi = \text{constante en } \Gamma_s \quad (35)$$

y dado que para resolver el problema resulta necesario asignar un valor a Ψ en algún punto, y que el valor particular que se asigne a la función Ψ en dicho punto, no modifica el valor de las tensiones (que dependen de la derivada de Ψ), la condición en la (35) puede escribirse como:

$$\Psi = 0 \quad \text{en } \Gamma_s \quad (36)$$

En forma similar, para el estado de carga en la Figura 7, con $s = (1 ; 0)$ la ec. (32) queda

$$\tau_{yx} = 0 \quad \text{en } \Gamma_s \quad (37)$$

Por la simetría se cumple que $I_{yz} = 0$, y además, en el plano de simetría $z = 0$, por lo cual la primera ec. (22) se simplifica, y la ec.(37) se escribe como:

$$\tau_{xy} = \frac{V_z}{2(1+\nu) I_y I_z} \Phi_{,y} = 0 \quad \text{en } \Gamma_s \quad y \quad (38)$$

$$\Phi_{,y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 \Rightarrow \Phi = \text{constante en } \Gamma_s \quad (39)$$

que, sin pérdida de generalidad, y por las mismas razones que lo expuesto para la función Ψ , permite adoptar la siguiente restricción sobre el plano de simetría

$$\Phi = 0 \quad \text{en } \Gamma_s \quad (40)$$

3.3.3. Secciones que presentan doble simetría geométrica.

Cuando las secciones presentan doble simetría, deberán combinarse las condiciones vistas previamente. Es decir, sobre el eje de simetría se cumple la ec. (29):

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \tau_n = 0 \quad \text{en } \Gamma_s \quad (29)$$

Y sobre el eje de antisimetría se cumple la ec. (31)

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{s} = \tau_s = 0 \quad \text{en } \Gamma_s \quad (31)$$

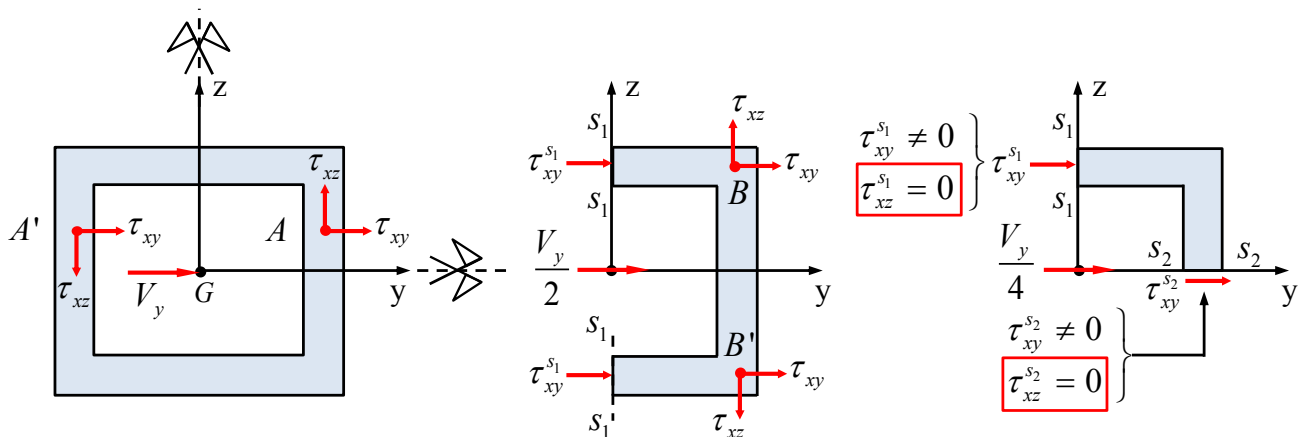


Figura 8: Doble simetría. Carga según el eje y

La Figura 8 muestra una sección cargada según la dirección y . El problema puede resolverse aplicando la mitad de la carga a la mitad derecha de la sección, si se considera el eje de simetría geométrico coincidente con el eje z . De hecho, este eje, para la carga considerada, constituye un eje de antisimetría y resulta de aplicación sobre

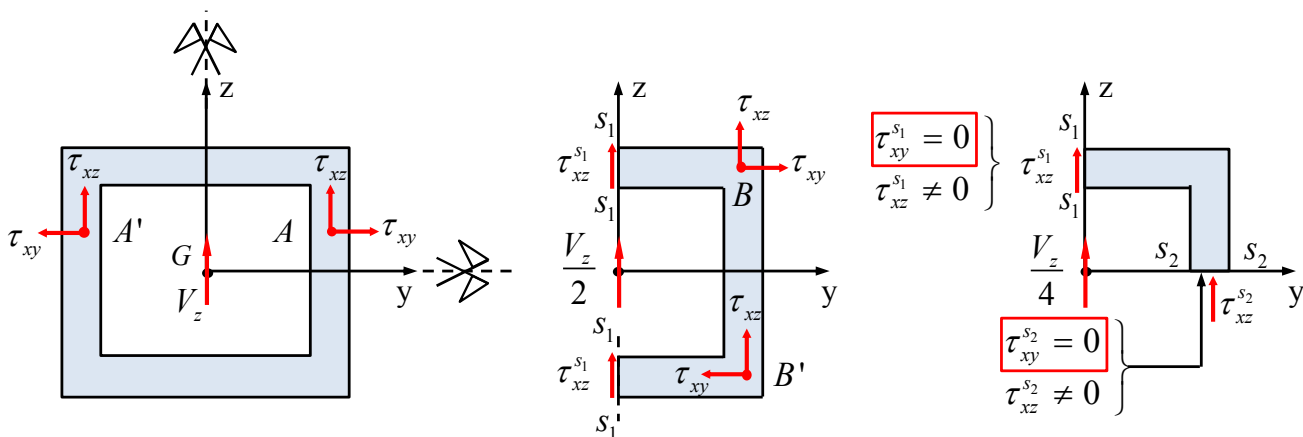


Figura 9: Doble simetría. Carga según el eje z

las secciones $s_1 - s_1$ la condición (29). El próximo paso, es considerar un cuarto de la carga sobre un cuarto de la sección inicial, utilizando el eje de simetría que coincide con y . En este caso (carga simétrica) es de aplicación la condición (27) que se aplica sobre la sección $s_2 - s_2$. Las restricciones resultantes sobre los bordes son $\tau_{xz}^{s_1} = 0$ y $\tau_{xz}^{s_2} = 0$. En un modelo de elementos finitos, la restricción $\tau_{xz}^{s_1} = 0$ se impone estableciendo la condición esencial $\Psi = 0$ en s_1 , mientras que la condición $\tau_{xz}^{s_2} = 0$, se satisface automáticamente.

La Figura 9 muestra una sección cargada según la dirección z . Para la carga considerada, el eje z , constituye un eje de simetría y resulta de aplicación sobre las secciones $s_1 - s_1$ la condición (29). Luego, se considerara un cuarto de la carga sobre un cuarto de la sección inicial, utilizando el eje de simetría que coincide con y . En este caso (carga antisimétrica) es de aplicación la condición (31) que se aplica sobre la sección $s_2 - s_2$. Las restricciones resultantes sobre los bordes son $\tau_{xy}^{s_1} = 0$ y $\tau_{xy}^{s_2} = 0$. En un modelo de elementos finitos, la restricción $\tau_{xy}^{s_1} = 0$ se satisface automáticamente, mientras que la condición $\tau_{xy}^{s_2} = 0$, se impone haciendo $\Phi = 0$ en s_2 .

4. EJEMPLOS

4.1. Sección elíptica sometida a torsión

En la Figura 10, se muestran resultados obtenidos al someter a momento torsor una sección sólida de forma elíptica. Las Figuras 10.a y 10.b fueron presentadas en [9], y se obtuvieron considerando la sección completa.

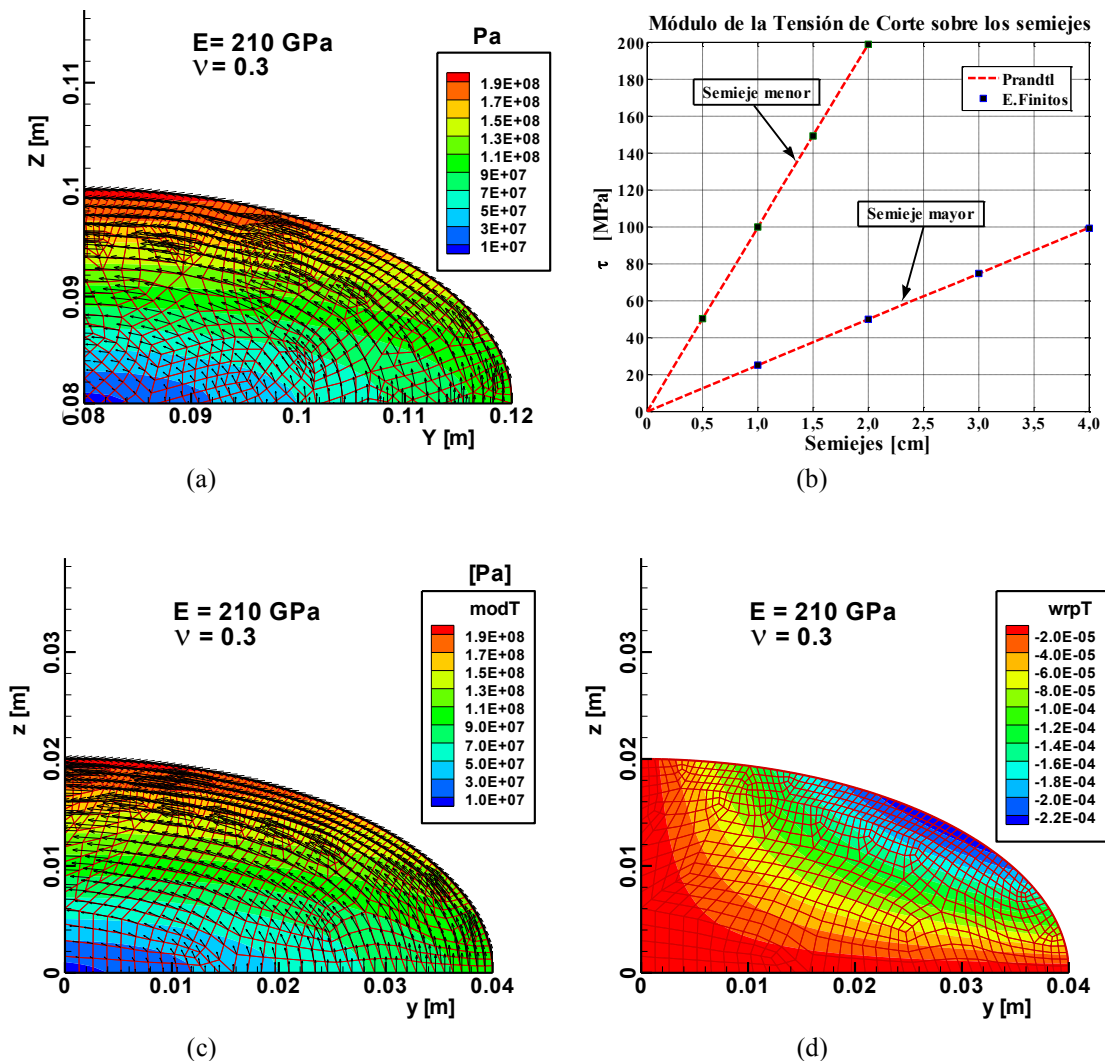


Figura 10: Sección sólida elíptica sometida a torsión.

En la Fig. 10.a, se muestra la distribución de los vectores de tensión de corte sobre una sección elíptica sólida (se muestra sólo un cuarto de la sección modelada), obtenidos mediante la formulación en Elementos Finitos (EF). El semieje mayor de la elipse mide $a=4\text{cm}$ y el menor $b=2\text{cm}$. La malla que se muestra en la figura son cuadriláteros de cuatro nodos generados a partir de la malla con elementos cuadriláteros de nueve nodos (cada elemento de 9 nodos da origen a 4 elementos de cuatro nodos). La malla utilizada estaba conformada por 648 elementos de 9 nodos. El momento aplicado fue $M_x=5\text{ kNm}$. Las características del material se muestran en la Figura 10.a. Para esta sección existen soluciones analíticas, ver referencias [4, 6], que permiten calcular el momento de inercia polar y las componentes de las tensiones de corte:

$$\tau_{xy} = -\frac{2M_x z}{\pi a b^3} ; \quad \tau_{xz} = \frac{2M_x y}{\pi a^3 b} ; \quad J = \frac{\pi a^3 b^3}{(a^2 + b^2)} \quad (41)$$

En relación a las tensiones, en la Figura 10.b se han graficado las tensiones obtenidas por EF con las que resultan de las ec. (41). Los valores de la tensión se han calculado sobre los semiejes de la sección, mostrando muy buena correspondencia. Respecto al momento de inercia polar de la sección, el reemplazo de a y b en la (41) conducen a $J = 8,0425 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ mientras que el valor calculado por EF, es $J_{EF} = 8,0463 \times 10^{-7} \text{ m}^4$. Los resultados en las Figuras 10.c y 10.d se obtuvieron aprovechando la doble simetría que presenta la sección elíptica, imponiendo a la función de alabeo la condición de borde $\omega = 0$ sobre todos los nodos que se encuentran sobre los ejes y y z . Los ejes y y z resultan de la intersección de los dos planos de simetría, que posee la elipse, con el plano que contiene a la sección. La Fig. 10.c, muestra nuevamente el resultado de las tensiones, que coincide con el descrito en la Fig. 10.a. Los valores obtenidos para el momento de inercia polar J_p también son coincidentes.

En la Fig. 10.d se muestra las líneas de contorno de la función de alabeo $\omega(y, z)$, que se relaciona con los desplazamientos u_z según la ec. (2). Para la sección elíptica, la función de alabeo tiene solución analítica [6]:

$$u_x = \omega(y, z) \theta = \frac{(b^2 - a^2)}{(b^2 + a^2)} y z \theta \quad \rightarrow \quad \omega(y, z) = \frac{(b^2 - a^2)}{(b^2 + a^2)} y z \quad (42)$$

y para el problema planteado, la ec. (42) para valores de $a=0.04\text{ m}$, $b=0.02\text{ m}$, $y=0.026\text{ m}$, $z=0.015\text{ m}$ conduce a $\omega(y, z) = -2.34 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, y el valor que proporciona la solución por EF de la ec. (6) es el mismo: $\omega(y, z)_{EF} = -2.34 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

4.2. Perfil IPN 200 con carga V_z

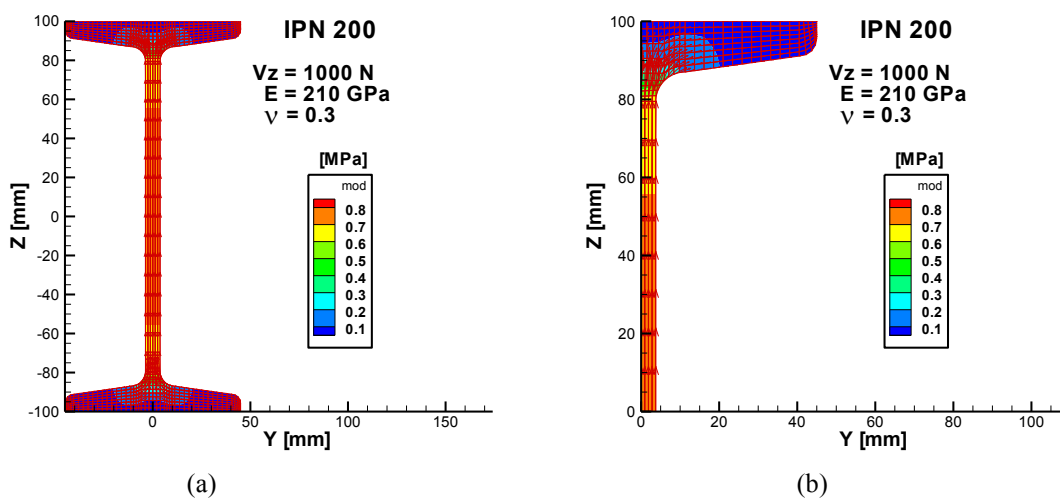


Figura 11: Perfil IPN 200 – Carga V_z .

En la Figura 11.a, se presentan los resultados obtenidos al cargar, según el eje z , un perfil IPN 200. La sección posee doble simetría. La carga actúa en forma simétrica respecto al eje de simetría que pasa por el baricentro y es paralelo al eje z , y en forma antisimétrica respecto al eje que pasa por el baricentro y es paralelo al eje y . Este caso se corresponde con lo descrito en la Fig. 9. La sección completa se analizó con 220 elementos cuadriláteros de 9 nodos. En la Figura 11.b se muestran los resultados de las tensiones en un cuarto de la sección, que como era de esperar coinciden con los de la Fig. 11.a.

5. CONCLUSIONES

Este trabajo es una continuación de lo presentado en [8, 9], en donde se implementó, utilizando el método de EF la solución de secciones homogéneas de forma arbitraria sometidas a esfuerzos de torsión y corte en las direcciones y y z . Los resultados permiten caracterizar la sección y determinar el área, momentos de inercia y productos de inercia, momentos de inercia polares, coeficientes de corte y distribución de las tensiones de corte producidas ya sea por torsión o corte. Sin embargo, en las referencias [8,9], no se analizaron las condiciones de simetría que deben imponerse cuando se analizan secciones que presentan uno o dos planos de simetría. Este fue el objetivo del presente trabajo. Primero, se consideraron secciones geoméricamente simétricas sometidas a torsión. Luego secciones simétricas con cargas de corte simétricas y posteriormente secciones simétricas con cargas de corte antisimétricas. Por último, los resultados anteriores se generalizaron para secciones que presentan doble simetría geométrica. Teniendo en cuenta que en cada caso de carga, momento torsor (M_t), carga de corte en las direcciones y o z (V_y, V_z), la solución del problema implica resolver funciones escalares (ω, Ψ , y Φ , respectivamente), en el plano de la sección, se puede concluir que:

1. Para secciones simétricas sometidas a M_t se debe hacer $\omega(y, z) = 0$ sobre el plano de simetría.
2. Si las cargas de corte, V_y ó V_z , son simétricas para el plano considerado, no se impone condición alguna sobre los puntos que se ubican sobre el plano de simetría.
3. Si las cargas de corte, V_y ó V_z , son antisimétricas para el plano considerado, debe imponerse la condición $\Psi(y, z) = 0$ ó $\Phi(y, z) = 0$, sobre los puntos que se ubican sobre el plano de simetría.
4. En todos los casos deben hacerse las previsiones correspondientes sobre los efectos de considerar la mitad de la sección, ya sea en las propiedades geométricas como en la carga aplicada.

REFERENCIAS

- [1] N. W. Murray, *Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures*, Clarendon Press Oxford, 1986.
- [2] A.P. Boresi and K. P. Chong, *Elasticity in Engineering Mechanics*, Elsevier, Amsterdam, Netherlands, 1987.
- [3] A. E. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, New York, 1944.
- [4] R. M. Rivello, *Theory and Analysis of Flight Structures*, McGraw-Hill, New York, 1969.
- [5] I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1956.
- [6] W. D. Pilkey, *Analysis and Design of Elastic Beams—Computational Methods*, J. Wiley & S., N. York, 2002.
- [7] M. A. Bhatti, *Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures*, J. Wiley & Sons, New York, 2006.
- [8] A. T. Brewer, C. N. Gómez, y S. Preidikman, *Análisis de vigas de sección arbitraria sometidas a tensiones de corte causadas por esfuerzos de torsión y corte: Parte 1—Formulación teórica*, CAIA III, La Plata, 2014, URL: <http://www.caia.ing.unlp.edu.ar/Actas-CAIA3/17.pdf>
- [9] A. T. Brewer, C. N. Gómez, y S. Preidikman, *Análisis de vigas de sección arbitraria sometidas a tensiones de corte causadas por esfuerzos de torsión y corte: Parte 2—Formulación mediante Elementos Finitos*, CAIA III, La Plata, 2014, URL: <http://www.caia.ing.unlp.edu.ar/Actas-CAIA3/18.pdf>