



## 4<sup>to</sup> Congreso Argentino de Ingeniería Aeronáutica



# MODELO CONTINUO PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO DE VIGAS SOMETIDAS A INTERACCIÓN CON FLUIDO

M. E. Pérez Segura<sup>a</sup>, J. A. Inaudi<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Dpto. de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina.*

<sup>b</sup>*Facultad de Ingeniería, Instituto Universitario Aeronáutico, Córdoba, Argentina.*

**Palabras claves:** Interacción fluido-estructura, dinámica, sistemas continuos, inestabilidad, vibraciones.

### Resumen

La motivación de este trabajo surge en la necesidad de analizar de manera simplificada el comportamiento de sistemas mecánicos en problemas de interacción fluido-estructura (IFE), dentro del campo de la aeroelasticidad. En este tipo de problemas existe una compleja relación bilateral entre acciones aerodinámicas y, la dinámica de la estructura elástica, lo que exige, en general, un análisis mediante métodos computacionales basados en la discretización de los dominios continuos. Si bien estos métodos han probado ser satisfactorios, en general su eficiencia se encuentra fuertemente ligada a las características geométricas y dinámicas del caso analizado y deben adaptarse en función de éstas.

El objetivo del presente trabajo es desarrollar un procedimiento alternativo a los métodos de discretización mediante elementos finitos, utilizando modelos de la dinámica de sistemas continuos y la aerodinámica semi-experimental.

Se desarrolla el caso de una viga perfilada de propiedades constantes longitudinalmente, sumergida en una corriente de fluido, con campos de desplazamientos en flexión y torsión. Se considera el caso de carga seguidora generada por la presión aerodinámica, se aplican métodos de linealización de ecuaciones de movimiento, se analizan estados de equilibrio dinámico e inestabilidades y se definen puntos de bifurcación o inestabilidad.

El modelo representa un ala en voladizo bajo solicitaciones aerodinámicas en su versión más elemental, para fines educacionales. Por último, se comparan los resultados obtenidos con otros provenientes de investigaciones experimentales y aplicaciones de otras metodologías de análisis.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los constantes avances en el ámbito ingenieril conllevan la aparición de modelos matemáticos de gran complejidad que raras veces poseen solución analítica para casos de interés. En general, para fenómenos complejos que abarcan varias áreas de la ciencia que se han estudiado tradicionalmente de manera independiente, surge la posibilidad de abordar el problema con un enfoque particionado. Se recurre entonces a métodos computacionales diferentes, basados en la discretización de los dominios continuos, y especializados en resolver cada una de las partes. Evidentemente este proceso implica el diseño de un mecanismo de interacción de los modelos que no siempre resulta de simple implementación y tanto su eficiencia como su aplicabilidad están subordinadas a las características particulares de cada problema. Del mismo modo, los tiempos de procesamiento y la cantidad de recursos computacionales requeridos suelen ser considerables y representan obstáculos importantes a la hora de optar por la aplicación de estos modelos.

El análisis multifísico de sistemas mecánicos en problemas de interacción fluido-estructura (IFE) dentro del campo de la aeroelasticidad computacional, constituye un caso particular de lo antes descrito y será el ejemplo considerado en este trabajo. El objetivo es desarrollar un procedimiento alternativo a los métodos de discretización en subdominios, utilizando modelos de la dinámica de sistemas continuos y la aerodinámica semi-experimental, para analizar estados de equilibrio dinámico e inestabilidades y definir puntos de bifurcación o inestabilidad.

Dos aspectos importantes relativos a los modelos basados en la discretización e interacción multifísica son los que motivan el desarrollo del presente trabajo. Por un lado y con la optimización como propósito, surge la necesidad de predecir el posible comportamiento o respuesta del sistema mecánico, a partir de un modelo simplificado cuya implementación represente un bajo costo computacional. Esto permitirá orientar la etapa de pre-proceso en base a las estimaciones obtenidas resultando en un incremento en la eficiencia relativa del método.

En segundo lugar, un modelo simplificado que pueda describir, al menos de manera aproximada, los fenómenos asociados al problema en tratamiento proporciona una fuente de contenidos educacionales más inteligible que su versión basada en la discretización. Luego, la introducción conceptual a la multifísica de los problemas aeroelásticos resulta accesible recurriendo a los procedimientos alternativos de la dinámica de los sistemas continuos.

Naturalmente, un proceso de simplificación como el que se propone aleja los resultados obtenidos de aquellos provenientes de la experimentación o de métodos más sofisticados.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL CASO

La metodología propuesta se aplica a un ejemplo sencillo de un problema de IFE que simula un ala en voladizo sumergida en una corriente de fluido. El modelo procura conservar el carácter tridimensional del caso, manteniendo activos los dos grados de libertad básicos (flexión y torsión) del mismo. Esto es en vista de que en la bibliografía especializada frecuentemente se aplican este tipo de análisis sólo a secciones bidimensionales o bien, se definen modelos de un único grado de libertad, el campo torsional de la viga, tal como lo exponen Hodges y Pierce [1].

Por otro lado, a pesar del avanzado grado de simplificación propuesto, el sistema conserva su característica multifísica puesto que deben tratarse con esquemas disímiles, por un lado, el fenómeno estructural/dinámico y, por otro, el aerodinámico. Esto exige la implementación de un mecanismo de acoplamiento entre ambos modelos que permita obtener un tratamiento conjunto.

### 2.1. Sistema mecánico

La descripción del comportamiento mecánico y estructural del caso se realiza a partir de la dinámica del continuo. Se analiza un modelo de viga para el que se plantea un sistema de ecuaciones diferenciales para los grados de libertad de flexión y torsión. La viga se considera recta, de cuerda constante, con un perfil aerodinámico delgado, como se muestra en la Figura 1.

Las ecuaciones de movimiento pueden derivarse aplicando distintos métodos de la mecánica analítica. En particular se recomienda el Principio de Hamilton Extendido expuesto por Clough y Penzien [2]. Este requiere determinar la energía cinética y la energía potencial del sistema, para luego calcular sus respectivas variaciones. La energía cinética puede escribirse de forma genérica como sigue:

$$T = \frac{1}{2} \int \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} dm \quad (1)$$

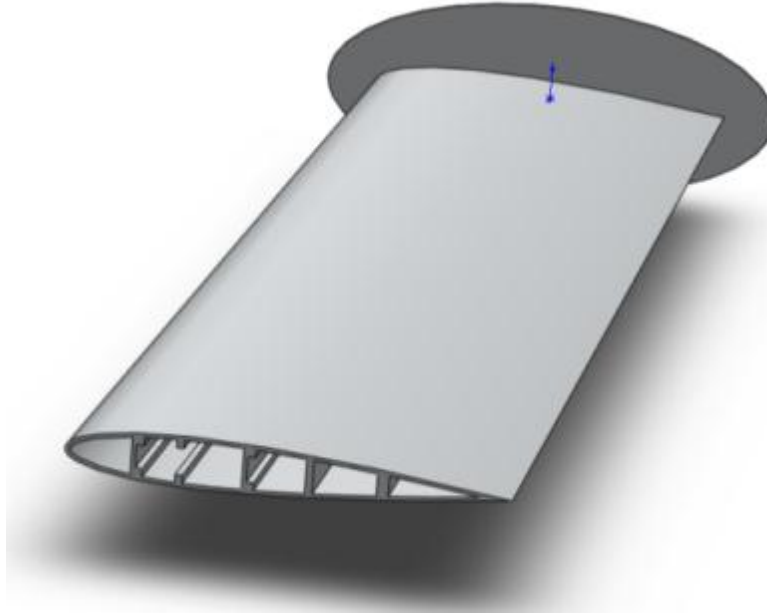


Figura 1: Esquema del modelo estructural

Donde  $\dot{\mathbf{R}}$  representa la primera derivada temporal del vector posición de un elemento diferencial de masa de la estructura. La expresión anterior se simplifica si se considera la configuración de la sección del modelo, dada en la Figura 2, para la cual puede escribirse:

$$\mathbf{R} = u\hat{n}_2 + X_\theta\hat{b}_1 = (u - X_\theta \sin(\theta))\hat{n}_2 + X_\theta \cos(\theta)\hat{n}_1 \quad (2)$$

Aquí, los versores  $\hat{n}_i$  representan un sistema fijo y sus pares  $\hat{b}_i$  un sistema móvil fijo a la sección. Luego será:

$$\dot{\mathbf{R}} = (\dot{u} - X_\theta \cos(\theta) \dot{\theta})\hat{n}_2 - X_\theta \sin(\theta) \dot{\theta}\hat{n}_1 = \dot{u}\hat{n}_2 - X_\theta \dot{\theta}\hat{b}_2 \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} = (\dot{u} - X_\theta \cos(\theta) \dot{\theta})^2 + (X_\theta \sin(\theta) \dot{\theta})^2 = \dot{u}^2 + \dot{\theta}^2 X_\theta^2 - 2\dot{u}\dot{\theta} X_\theta \cos(\theta) \quad (4)$$

Introduciendo la masa por unidad de longitud de la sección  $m(x) = \rho A$  y el momento de inercia  $I_0$  respecto al centro de masa y denominando  $X_\theta$  a la distancia entre centro de masa (CG) y el eje elástico (EE); se tiene:

$$T = \frac{1}{2} \int [m(x)\dot{u}^2 + I_0\dot{\theta}^2 + m(x)\dot{\theta}^2 X_\theta^2 - 2\dot{u}\dot{\theta} H(x)] dx \quad (5)$$

En la ecuación (5) el momento de inercia respecto al eje elástico puede expresarse como el momento de inercia baricéntrico más un término de transporte, y se llamó  $H(x) = X_\theta m(x) \cos(\theta)$ .

Para formular la energía potencial sólo se considera la energía de deformación en flexión y torsión, esto es:

$$V = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{2} EI(x) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]^2 + \frac{1}{2} GJ(x) \left[ \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]^2 \right) dx \quad (6)$$

El proceso de derivación se desarrolla mediante el principio de Hamilton y el resultado son las expresiones clásicas de la teoría de vigas, las cuales, considerando una sección arbitraria como la de la Figura 2: Sección transversal de la viga, se enuncian para este caso:

$$\begin{aligned} m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - H(x) \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] &= Q_u(x) \\ [I_0(x) + m(x)X_\theta^2] \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + H(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ GJ(x) \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right] &= Q_\theta(x) \end{aligned} \quad (7)$$

$$0 < x < L; t > 0$$

Donde,  $\theta(x,t)$  y  $h(x,t)$  son las coordenadas generalizadas o campos de deformación que representan el ángulo de *pitch* y posición vertical del EE, respectivamente, funciones de la coordenada longitudinal  $x$  y del tiempo  $t$ ;  $H(x)$ , el momento estático de cada sección respecto del EE;  $EI(x)$  y  $GJ(x)$  son los parámetros de rigidez en flexión y torsión;  $I_0(x)$ , momento de inercia de la sección respecto del ejes longitudinal que pasa por el

CG;  $Q_u(x)$  y  $Q_\theta(x)$  son las fuerzas generalizadas no incluidas en el potencial asociadas a las coordenadas correspondientes.

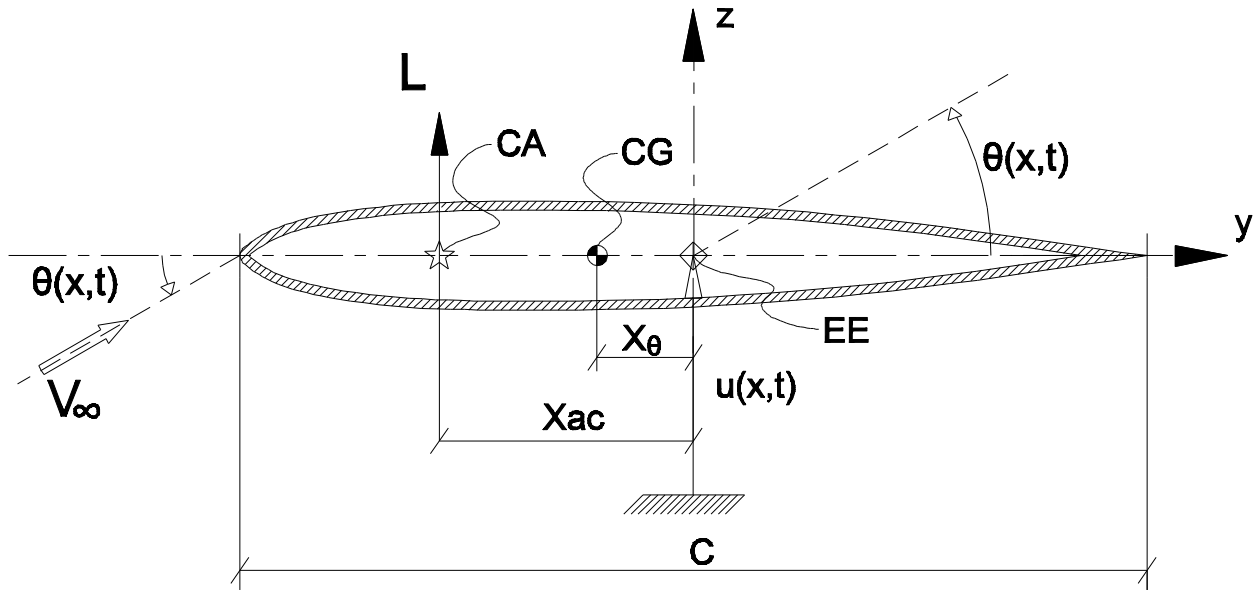


Figura 2: Sección transversal de la viga

Las ecuaciones (7) representan el caso general donde todas las propiedades mecánicas de la sección son variables con la coordenada longitudinal  $x$ , sin embargo, por simplicidad se considerará que éstas no varían a lo largo de la envergadura. Esto es, se asumirá un ala recta, de perfil y cuerda constantes, sin alabeo, estructuralmente uniforme y de un único material. Tomando esto en consideración, el sistema se simplifica como sigue:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - H \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} &= Q_u(x) \\ [I_o + mX_\theta^2] \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + H \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - GJ \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} &= Q_\theta(x) \end{aligned} \quad (8)$$

Luego, sólo las cargas y coordenadas generalizadas son funciones de  $x$  y éstas últimas, en particular, también de  $t$ .

El planteo del problema debe completarse con la definición de condiciones de borde apropiadas en función del modelo adoptado. En este caso, al considerar el ala en voladizo, corresponden condiciones compatibles con una viga empotrada-libre. Teniendo en cuenta que se consideraron propiedades mecánicas constantes, las condiciones de borde se reducen a evaluar las coordenadas generalizadas y sus derivadas en los extremos del dominio descrito por  $x$ . Luego, en el empotramiento no existirá rotación, giro ni desplazamiento:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0 \\ \theta(0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

y en el extremo libre los esfuerzos serán nulos, lo que implica

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} &= 0 \\ \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x=L} &= 0 \\ \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Las ecuaciones (8), (9) y (10) constituyen un problema de valores en la frontera (BVP) que describe la dinámica del sistema mecánico propuesto. Para completar la descripción del modelo se requiere desarrollar un modelo de las cargas generalizadas no conservativas aerodinámicas.

## 2.2. Modelo aerodinámico

Las acciones aerodinámicas del fluido sobre la estructura se representan con las cargas generalizadas, cuyas expresiones resultan de aplicar un esquema que las represente. De acuerdo con la obtención de las ecuaciones de movimiento,  $Q_u(x)$  y  $Q_\theta(x)$  corresponden a la fuerza aerodinámica de sustentación y el momento aerodinámico alrededor del EE, es decir:

$$Q_u(x) = L(x) \quad (11)$$

$$Q_\theta(x) = M_{EE}(x) \quad (12)$$

Donde, el momento aerodinámico, en un valor de  $x$  dado, puede pensarse como un momento libre aplicado sobre el perfil, más la contribución de la fuerza de sustentación por el brazo de palanca asociado,

$$M_{EE}(x) = M_o(x) - L(x)X_{ac}(x)\cos(\theta(x, t)) \quad (13)$$

Por adoptarse un perfil simétrico el momento libre es nulo y la contribución aerodinámica sobre la ecuación de momentos se reduce a la acción de la fuerza de sustentación. Además, dadas las características geométricas del ala,  $X_{ac}$  es constante a lo largo de la envergadura.

De manera general, las acciones aerodinámicas para cada estación a lo largo de la envergadura son funciones no lineales de las coordenadas generalizadas y de sus derivadas temporales. En este sentido, el modelo podría incorporar más efectos relacionados a la interacción con el fluido circundante. En el presente trabajo se modelan las cargas aerodinámicas sobre la viga sin incluir coordenadas adicionales para no aumentar la dimensión del problema respecto del modelo estructural. En definitiva, el fluido producirá modificaciones en la rigidez generalizada, el amortiguamiento generalizado y la masa generalizada del problema, en la medida que se incluyan fenómenos de interacción.

Teniendo en cuenta lo descrito en el párrafo anterior puede expresarse a la sustentación como un coeficiente dependiente únicamente de la coordenada en la envergadura  $x$  y un ángulo de ataque efectivo generado por los efectos que se consideren.

$$L(x) = L^*(x)\alpha_{ef} \quad (14)$$

El caso más simple que puede analizarse corresponde a considerar únicamente un incremento en la rigidez torsional del sistema dada por la carga aerodinámica de sustentación. Esto es, entendiendo que los demás fenómenos tienen un orden de influencia relativa menor, por lo que pueden ser despreciados. Esta versión del modelo aerodinámico se propone en forma de la ecuación (15).

$$\alpha_{ef} = \theta(x, t) \quad (15)$$

Luego para la sustentación será,

$$L(x) = L^*(x)\theta(x, t) \quad (16)$$

Un segundo escalón en cuanto a la complejidad surge de incorporar los efectos de las primeras derivadas temporales de las coordenadas generalizadas, con lo cual el ángulo de ataque efectivo puede expresarse de la siguiente manera:

$$\alpha_{ef} = \theta - \tan\left(\frac{\dot{u}}{V_\infty}\right) + \tan\left(\left(\frac{1}{2} - X_\theta\right)\frac{\dot{\theta}}{V_\infty}\right) \quad (17)$$

definiendo una función algo más compleja para la sustentación expuesta en la ecuación (14). Aquí puede observarse la contribución del fluido en términos de  $\dot{u}$  y  $\dot{\theta}$ .

Para delimitar el objetivo del presente trabajo, no se analizarán aquí otros fenómenos de interacción, puesto que los anteriores son suficientes para ilustrar de manera apropiada la multifísica del caso.

Por último, resta definir la distribución de sustentación a lo largo del ala,  $L^*(x)$ , lo que se realiza proponiendo dos métodos. Éstos, si bien producen resultados similares, son concebidos de manera sumamente disímil, de ahí la importancia de incorporar ambos al análisis. A continuación se exponen cada uno de ellos.

## 2.3. Línea sustentadora de Prandtl

La primera teoría práctica sobre las propiedades aerodinámicas de un ala finita fue desarrollada por Prandtl entre 1911 y 1918, e incluso hoy es utilizada para cálculos preliminares. En términos generales, Prandtl propone

localizar una distribución de vórtices herradura a lo largo de la envergadura del ala. Estos vórtices serán coincidentes en una línea, denominada línea sustentadora, y su circulación será tal que buscará representar el campo de movimiento fluido alrededor del ala. Al lector interesado en profundizar en el desarrollo del método se le recomienda la exposición de Anderson [3] sobre el tema.

De acuerdo al teorema de Kutta-Joukowski la distribución de sustentación será una función de la distribución de circulación a lo largo de la envergadura, según la ecuación (18).

$$L(x) = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma(x) \quad (18)$$

Prandtl propone una representación de  $\Gamma(x)$  en la forma de una serie de Fourier. Para ello, se transforma la coordenada a longitudinal en  $\varphi$ , siendo

$$x = -\frac{b}{2} \cos(\varphi) \quad (19)$$

Lo que permite expresar la circulación en función de esta nueva coordenada como sigue,

$$\Gamma(\varphi) = 2bV_{\infty} \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \quad (20)$$

donde  $V_{\infty}$  y  $\rho_{\infty}$  son la velocidad y densidad de la corriente libre y  $b$ , la envergadura del ala analizada.

En la ecuación (20) pueden considerarse tantos términos como se desee para incrementar la precisión. No obstante y siguiendo el razonamiento simplificado, se conservará sólo el primero de ellos. Haciendo esto se recupera una distribución de circulación, y por ende de sustentación, elíptica, a saber:

$$\Gamma(x) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^2} \quad (21)$$

$$L(x) = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^2} \quad (22)$$

Donde el factor  $\Gamma_0$  se define en función de la sustentación total de diseño del ala y resulta:  $\Gamma_0 = (2V_{\infty} SC_L)/b\pi$

Reconstituyendo la ecuación (22) se determina finalmente la fuerza actuante sobre cada estación a lo largo de la envergadura, según la aplicación de éste modelo aerodinámico:

$$L(x) = q_{\infty} SC_L \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^2} \quad (23)$$

En esta ecuación  $q_{\infty}$  representa la presión dinámica de la corriente libre,  $S$  indica la superficie del ala y  $C_L$ , el coeficiente de sustentación de ésta, que se mantiene en el rango lineal en función de la pendiente de sustentación y el ángulo de ataque.

$$C_L = C_{L\alpha} \alpha_{ef} \quad (24)$$

Finalmente, llamando  $CL_N = \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^2}$  a la variación normalizada se coeficiente de sustentación, ilustrada en la Figura 3, expresa la distribución de sustentación como sigue:

$$L(x) = q_{\infty} SC_{L\alpha} \alpha_{ef} CL_N \quad (25)$$

Donde puede identificarse a  $L^*(x) = q_{\infty} SC_{L\alpha} CL_N$ .

## 2.4. Nota Técnica NACA 2751

Este nota técnica emitida por el Comité Asesor Nacional de Aeronáutica (NACA) en el año 1952, bajo a autoría de Diederich [4], se refiere a métodos aproximados para el cálculo de distribuciones de sustentación a lo largo de la envergadura para velocidades subsónicas. Como es habitual en este tipo de documentos las metodologías de cálculo provienen de procesos semi-experimentales y proporcionan un procedimiento paso a paso para estimar propiedades aerodinámicas. Si bien el respaldo teórico del mismo no se encuentra expresamente detallado, los resultados que se obtienen han mostrado amplia aplicabilidad y aceptación.

Nuevamente, no es objeto del presente trabajo ahondar en la metodología de cálculo por lo que se proporcionan sólo las expresiones a ser utilizadas. Según la Nota Técnica 2751, la distribución de sustentación se compone de varios factores de aproximación que son en general funciones del alargamiento y una función de

distribución  $f$  que se aproxima de forma numérica. Luego, para el caso propuesto debe recurrirse a las siguientes ecuaciones.

$$f(x) = -9,124x^5 + 18,466x^4 - 13,336x^3 + 3,2151x^2 - 0,3891x + 1,2822$$

$$CL_N = 0,38 + 1,24 \frac{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^2\right)}}{\pi} + 0,3f \quad (26)$$

Donde  $CL_N$  se encuentra representado en la Figura 4. Por lo tanto, considerando las ecuaciones (25) y (26), la distribución de sustentación se calcula con la siguiente expresión:

$$L(x) = q_\infty S C_{L\alpha} \alpha_{ef} CL_N = L^*(x) * \alpha_{ef} \quad (27)$$

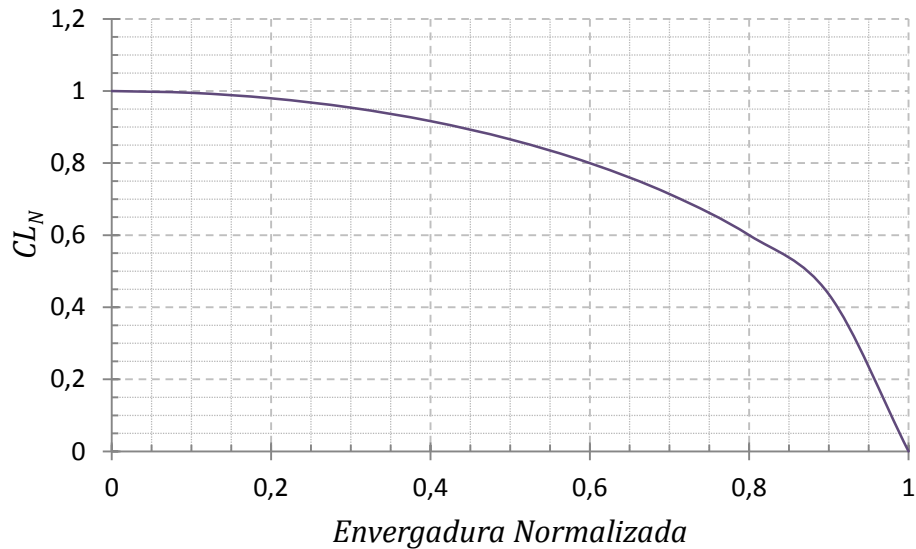


Figura 3: Distribución de sustentación, línea sustentadora de Prandtl

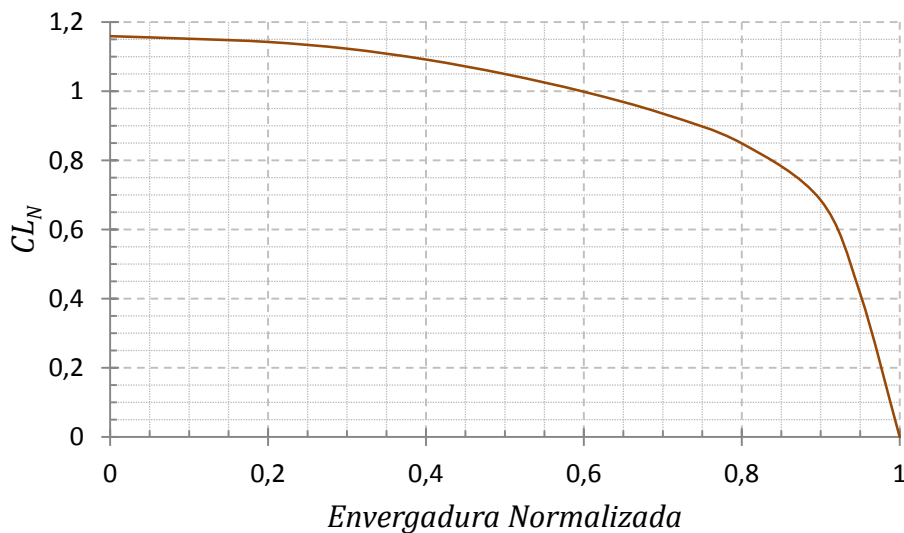


Figura 4: Distribución de sustentación, NACA TN 2751

### 3. MODELO ACOPLADO

El caso a analizar se construye con los modelos mecánico y aerodinámico. Del primero se extraen las ecuaciones de movimiento y las condiciones de contorno, y se aplican, provenientes del segundo, las acciones

aerodinámicas sobre el dominio. La interacción entre las partes es directa y genera un sistema de ecuaciones diferenciales, en principio no lineales de coeficientes variables:

$$m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - H \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = L(x) \quad (28)$$

$$[I_o + mX_\theta^2] \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + H \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - GJ \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = L(x) X_{ac} \cos(\theta(x,t))$$

En esta ecuación la distribución  $L(x)$  puede asumirse como alguna de las descritas anteriormente y evidentemente las condiciones de borde dadas por las ecuaciones (9) y (10) se mantienen. La solución de las ecuaciones diferenciales planteadas requiere un tratamiento especial y complejo para obtener estados de equilibrio y análisis de estabilidad dinámica.

Debe considerarse que, si bien se asumen la mayoría de las propiedades constantes, la velocidad de la corriente libre es un parámetro fundamental y será determinante para establecer los puntos de interés en las configuraciones de equilibrio del sistema. Luego, el proceso consiste en resolver el sistema en las variables  $u(x,t)$  y  $\theta(x,t)$  para un valor de velocidad dado y analizar las características dinámicas de esta solución. A medida que se incrementa el parámetro  $V_\infty$  y el proceso se repite, se intentarán describir los cambios en las condiciones de estabilidad de cada solución.

### 3.1. Linealización

Un paso en el proceso de simplificación del sistema de ecuaciones diferenciales del modelo consiste en linealizar las expresiones involucradas. En el sistema definido por las ecuaciones (28), los términos no lineales son:

$$H(x) = X_\theta m \cos(\theta(x,t)) \quad (29)$$

$$L^*(x) \alpha_{ef} = L^*(x) \left[ \theta - \tan\left(\frac{\dot{u}}{V_\infty}\right) + \tan\left(\left(\frac{c}{2} - X_\theta\right) \frac{\dot{\theta}}{V_\infty}\right) \right] \quad (30)$$

$$L^*(x) X_{ac} \alpha_{ef} \cos(\theta) = L^*(x) X_{ac} \left[ \theta - \tan\left(\frac{\dot{u}}{V_\infty}\right) + \tan\left(\left(\frac{c}{2} - X_\theta\right) \frac{\dot{\theta}}{V_\infty}\right) \right] \cos(\theta) \quad (31)$$

Se propone entonces una condición de equilibrio dinámico alrededor de la cual se linealizan los términos anteriores. Las coordenadas generalizadas en dicha condición se escriben en la ecuación (32) y, por tratarse de una configuración de equilibrio dinámico, sus derivadas temporales serán nulas.

$$(\theta; u)_{eq} = (\theta_{eq}; u_{eq}) \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{eq} &= 0 \\ \ddot{\theta}_{eq} &= 0 \\ \dot{u}_{eq} &= 0 \\ \ddot{u}_{eq} &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Tomando en primer lugar el término dado por la ecuación (29), expandiéndolo en serie de Taylor alrededor de la condición de equilibrio antes mencionada y conservando hasta el término lineal, se escribe:

$$H(x) = X_\theta m \cos(\theta(x,t)) \cong X_\theta m \left[ \cos(\theta_{eq}) + \left( -\sin(\theta_{eq}) (\theta - \theta_{eq}) \right) \right] \quad (34)$$

Donde se consideró la independencia de  $X_\theta$  y  $m$  de las coordenadas generalizadas.

Siguiendo con el término de la ecuación (30) y realizando un proceso similar al anterior, se tiene:

$$L^*(x) \alpha_{ef} \cong [L^*(x) * \alpha_{ef}]_{(\theta_{eq}; u_{eq}; \dot{\theta}_{eq}; \dot{u}_{eq})} + [[L^*(x)]' * \alpha_{ef}]_{(\theta_{eq}; u_{eq}; \dot{\theta}_{eq}; \dot{u}_{eq})} \left( (\theta; u; \dot{\theta}; \dot{u}) - (\theta_{eq}; u_{eq}; \dot{\theta}_{eq}; \dot{u}_{eq}) \right) + [L^*(x) * \alpha'_{ef}]_{(\theta_{eq}; u_{eq}; \dot{\theta}_{eq}; \dot{u}_{eq})} \left( (\theta; u; \dot{\theta}; \dot{u}) - (\theta_{eq}; u_{eq}; \dot{\theta}_{eq}; \dot{u}_{eq}) \right) \quad (35)$$

Reemplazando términos, operando y teniendo en cuenta que  $L^*(x)$  es independiente de las coordenadas generalizadas, la expresión anterior se reduce a:



$$L^*(x) \alpha_{ef} \cong L^*(x) \left[ \left( \theta_{eq} + \theta' |_{\theta_{eq}} (\theta - \theta_{eq}) \right) - \left( \tan \left( \frac{\dot{u}_{eq}}{V_{\infty}} \right) + \left[ \tan \left( \frac{\dot{u}}{V_{\infty}} \right) \right]'_{\dot{u}=\dot{u}_{eq}} \left( \frac{\dot{u}}{V_{\infty}} - \frac{\dot{u}_{eq}}{V_{\infty}} \right) \right) + \left( \tan \left( \frac{C}{2} - X_{\theta} \right) \frac{\dot{\theta}_{eq}}{V_{\infty}} \right) + \left[ \tan \left( \frac{C}{2} - X_{\theta} \right) \frac{\dot{\theta}}{V_{\infty}} \right]'_{\dot{\theta}=\dot{\theta}_{eq}} \left( \left( \frac{C}{2} - X_{\theta} \right) \frac{\dot{\theta}}{V_{\infty}} - \left( \frac{C}{2} - X_{\theta} \right) \frac{\dot{\theta}_{eq}}{V_{\infty}} \right) \right] \quad (36)$$

Derivando e incorporando las ecuaciones (33) en la expresión anterior, resulta:

$$L^*(x) \alpha_{ef} \cong L^*(x) \left[ \theta - \frac{\dot{u}}{V_{\infty}} + \left( \frac{C}{2} - X_{\theta} \right) \frac{\dot{\theta}}{V_{\infty}} \right] \quad (37)$$

Por último, aplicando un razonamiento análogo al término de la ecuación (31) se obtiene:

$$L^*(x) X_{ac} \alpha_{ef} \cos(\theta) \cong \left[ L^*(x) * X_{ac} * \alpha_{ef} * \cos(\theta) \right]_{(\theta_{eq}; u_{eq}; \dot{\theta}_{eq}; \dot{u}_{eq})} + L^*(x) * X_{ac} * \left[ [\cos(\theta)]' * \alpha_{ef} \right]_{(\theta_{eq}; u_{eq}; \dot{\theta}_{eq}; \dot{u}_{eq})} \left( (\theta; u; \dot{\theta}; \dot{u}) - (\theta_{eq}; u_{eq}; \dot{\theta}_{eq}; \dot{u}_{eq}) \right) + L^*(x) * X_{ac} * \left[ \cos(\theta) * \alpha'_{ef} \right]_{(\theta_{eq}; u_{eq}; \dot{\theta}_{eq}; \dot{u}_{eq})} \left( (\theta; u; \dot{\theta}; \dot{u}) - (\theta_{eq}; u_{eq}; \dot{\theta}_{eq}; \dot{u}_{eq}) \right) \quad (38)$$

Reordenando y sustituyendo se arriba a la siguiente expresión linealizada:

$$L^*(x) X_{ac} \alpha_{ef} \cos(\theta) \cong L^*(x) * X_{ac} * \left[ \cos(\theta_{eq}) * \theta_{eq} + \left( -\sin(\theta_{eq}) \theta_{eq} (\theta - \theta_{eq}) \right) + \cos(\theta_{eq}) \left[ \theta - \frac{\dot{u}}{V_{\infty}} + \left( \frac{C}{2} - X_{\theta} \right) \frac{\dot{\theta}}{V_{\infty}} \right] \right] \quad (39)$$

Para expresar la ecuación diferencial linealizada es necesario determinar la condición de equilibrio estático. En particular  $\theta_{eq}$ , será una función de la coordenada a lo largo de la envergadura  $x$  y de la velocidad de la corriente libre. En este punto, puede asumirse que debido a las condiciones y configuración del sistema el equilibrio buscado será muy próximo a la condición neutra del sistema, es decir:

$$(\theta_{eq}; u_{eq}) \cong (0; 0) \quad (40)$$

Lo que permite hacer simplificaciones en los términos linealizados con la premisa de que  $\cos(\theta_{eq}) = 1$  y  $\sin(\theta_{eq}) = \tan(\theta_{eq}) = 0$ . Luego:

$$H(x) = X_{\theta} m \cos(\theta(x, t)) \cong X_{\theta} m \quad (41)$$

$$L^*(x) \alpha_{ef} \cong L^*(x) \left[ \theta - \frac{\dot{u}}{V_{\infty}} + \left( \frac{C}{2} - X_{\theta} \right) \frac{\dot{\theta}}{V_{\infty}} \right] \quad (42)$$

$$L^*(x) X_{ac} \alpha_{ef} \cos(\theta) \cong L^*(x) X_{ac} \left[ \theta - \frac{\dot{u}}{V_{\infty}} + \left( \frac{C}{2} - X_{\theta} \right) \frac{\dot{\theta}}{V_{\infty}} \right] \quad (43)$$

Estas expresiones son las que se utilizan en la versión linealizada del sistema a continuación para el análisis de estabilidad dinámica.

### 3.2. Solución propuesta

Para resolver el modelo en vibración libre, se proponen soluciones en el tiempo para los campos de desplazamiento y rotación del tipo:

$$u(x, t) = U(x) e^{st} \quad (44)$$

$$\theta(x, t) = \theta(x) e^{st} \quad (45)$$

Donde  $s$  es un polo del modelo, en general complejo. Las funciones de forma  $U(x)$  y  $\theta(x)$  constituyen el modo de vibración natural asociado al polo  $s$ . Las ecuaciones diferenciales que satisfacen a derivadas de las mismas serán:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= U^I(x)e^{st} ; \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = U^{II}(x)e^{st} ; \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = U^{III}(x)e^{st} ; \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = U^{IV}(x)e^{st} \\
 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= U(x)s^2 e^{st} ; \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} = \Theta(x)s^2 e^{st} \\
 \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} &= \Theta^I(x)e^{st} ; \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = \Theta^{II}(x)e^{st}
 \end{aligned} \tag{46}$$

Luego, reemplazando las ecuaciones (44), (45) y (46) en el sistema linealizado y realizando manipulaciones algebraicas se obtiene:

$$\begin{aligned}
 &\left[ -m U(x)s^2 + H \Theta(x)s^2 + L^*(x) \left[ \theta - \frac{us}{V_\infty} + \left( \frac{C}{2} - X_\theta \right) \frac{\theta s}{V_\infty} \right] \right] \frac{1}{EI} = U^{IV}(x) \\
 &\left[ [I_o + mX_\theta^2] \Theta(x)s^2 + H U(x)s^2 - L^*(x) X_{ac} \left[ \theta - \frac{us}{V_\infty} + \left( \frac{C}{2} - X_\theta \right) \frac{\theta s}{V_\infty} \right] \right] \frac{1}{GJ} = \Theta^{II}(x)
 \end{aligned} \tag{47}$$

Son estas ecuaciones diferenciales acopladas las que definen los campos de desplazamiento de los modos de vibración del modelo.

### 3.3. Formulación en espacio de estado

Es conveniente plantear el sistema dado por las ecuaciones (47) en espacio de estado. Para lo cual se define un vector que agrupa las variables involucradas y sus derivadas de manera que se verifique un sistema matricial lineal estándar del tipo:

$$[A(x, s)] \mathbf{z}(x) = \mathbf{z}'(x) \tag{48}$$

En donde el vector de estado y su derivada se definen como:

$$\mathbf{z}(x) = [U(x); U^I(x); U^{II}(x); U^{III}(x); \Theta(x); \Theta^I(x)]^T \tag{49}$$

$$\mathbf{z}'(x) = [U^I(x); U^{II}(x); U^{III}(x); U^{IV}(x); \Theta^I(x); \Theta^{II}(x)]^T \tag{50}$$

Mientras que la matriz  $[A(x, s)]$  reúne los coeficientes de las ecuaciones, a saber:

$$[A(x, s)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(ms^2 + \frac{L^*(x)s}{V_\infty})}{EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{Hs^2 + L^*(x) \left( 1 + \frac{(\frac{C}{2} - X_\theta)s}{V_\infty} \right)}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{Hs^2}{GJ} & 0 & 0 & 0 & \frac{[I_o + mX_\theta^2]s^2 - L^*(x) X_{ac} \left( 1 + \frac{(\frac{C}{2} - X_\theta)s}{V_\infty} \right)}{GJ} & 0 \end{bmatrix} \tag{51}$$

### 4. ABORDAJE DE LA SOLUCIÓN

Las soluciones que se pretenden son los pares  $(s, V_\infty)$ , polo y velocidad de la corriente libre, que satisfagan el sistema y su condición dependerá de las características del polo. El proceso propuesto para la búsqueda de soluciones consiste en combinar la integración numérica de las ecuaciones diferenciales modales con un problema de autovalores siguiendo la siguiente operatoria.

1. En primer lugar se fija un valor de velocidad  $V_\infty$  y un valor para el polo  $s$ . Seguidamente, se imponen al sistema las condiciones de borde en el extremo  $x=0$ , que según los pasos transitados se escriben:

$$\mathbf{z}(0) = [0; 0; U^{II}(0); U^{III}(0); 0; \Theta^I(0)]^T \tag{52}$$

2. Para completar el conjunto de condiciones de borde, se proponen tres combinaciones linealmente independientes de las restantes para el extremo  $x = 0$ , que luego se ajustarán a las condiciones reales. Se toma el caso, por ejemplo, de una base canónica es decir:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z}_1(0) &= [U(0); U'(0); 1; 0; \Theta(0); 0]^T \\
 \mathbf{z}_2(0) &= [U(0); U'(0); 0; 1; \Theta(0); 0]^T \\
 \mathbf{z}_3(0) &= [U(0); U'(0); 0; 0; \Theta(0); 1]^T
 \end{aligned} \tag{53}$$

3. Se integran numéricamente las ecuaciones de movimiento utilizando la formulación en espacio para cada uno de los tres conjuntos de condiciones de bordes dados por la combinación de  $[z(0); \mathbf{z}_i(0)]$ . En este punto, se transformó el BVP en un problema de valores iniciales que se integra de 0 a  $L$ . Luego, el proceso de integración arroja tres soluciones distintas, una para cada conjunto de condiciones iniciales.

4. Dada la linealidad del sistema, se propone una combinación lineal de las soluciones obtenidas para satisfacer las condiciones de borde en el extremo  $x = L$ . En general puede escribirse:

$$\mathbf{z}(x) = C_1 \mathbf{z}_1(x) + C_2 \mathbf{z}_2(x) + C_3 \mathbf{z}_3(x) \tag{54}$$

Y en el extremo:

$$\mathbf{z}(L) = C_1 \mathbf{z}_1(L) + C_2 \mathbf{z}_2(L) + C_3 \mathbf{z}_3(L) \tag{55}$$

Reduciendo el vector de estado a las condiciones que se conocen en el extremo  $x = L$ ,  $\mathbf{z}_r(L)$ , se puede expresar matricialmente:

$$\mathbf{z}_r(L) = [U^{II}(L); U^{III}(L); \Theta^I(L)]^T = [0; 0; 0]^T \tag{56}$$

$$\mathbf{z}_r(L) = [\mathbf{z}_{r1}(L); \mathbf{z}_{r2}(L); \mathbf{z}_{r3}(L)] \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^{II}(L) & U_2^{II}(L) & U_3^{II}(L) \\ U_1^{III}(L) & U_2^{III}(L) & U_3^{III}(L) \\ \Theta_1^I(L) & \Theta_2^I(L) & \Theta_3^I(L) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{57}$$

Para que el sistema dado por la ecuación (57) tenga soluciones distintas de la trivial, su matriz de coeficientes deberá ser singular. Por lo tanto, se evalúa el determinante de dicha matriz buscando que se anule para un determinado valor del polo  $s$  propuesto.

5. El proceso iterativo de búsqueda de polos se desarrolla hasta obtener un determinante nulo. Luego, para dicho polo y el valor de velocidad impuesto inicialmente se tiene el par solución  $(s, V_\infty)$  buscado.

6. Finalmente, se modifica el valor de velocidad y se repite la secuencia para encontrar el lugar de raíces del modelo en función de la velocidad del fluido.

#### 4.1. Generalización de la implementación

El procedimiento antes detallado puede ser adaptado para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineal a coeficientes variables genérico, al que apliquen soluciones del tipo dado por las ecuaciones (44) y (45). Independientemente de la ley de variación de los coeficientes, es posible recurrir a la formulación en espacio de estado la que, para un sistema arbitrario, se escribe:

$$[A(\mathbf{x}, s)] \cdot \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}'(\mathbf{x}) \tag{58}$$

Nótese que en este caso la variable dependiente puede ser multidimensional. Existirán entonces dos vectores de estado para las condiciones de borde en cada uno de los extremos del dominio, sean

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \tag{59}$$

$$\mathbf{z}(L) = \mathbf{z}_L \tag{60}$$

Naturalmente sólo algunas de las componentes (una cantidad  $n$ ) de los vectores de las ecuaciones (59) y (60) serán conocidas, por lo que deberán proponerse conjuntos linealmente independiente de las restantes, tantos como condiciones desconocidas existan en el extremo. Resultarán entonces  $n$  vectores reducidos linealmente independientes, para el extremo considerado, genéricamente  $x = 0$ .

$$\mathbf{z}_{r1}(0), \mathbf{z}_{r2}(0), \dots, \mathbf{z}_{rn}(0) \tag{61}$$

Se deberá entonces integrar numéricamente el sistema  $n$  veces, una vez con cada uno de los sets de condiciones de borde en el extremo escogido, teniendo en cuenta que se pasó de un BVP a un problema de valores iniciales. Evaluando las soluciones de estas integraciones en el extremo opuesto, se tendrán los valores de condiciones de borde que deben ajustarse.

Debido a la linealidad del sistema, una combinación lineal de sus soluciones será también una solución. Luego, se propone que el extremo  $x = L$

$$\mathbf{z}_L = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{z}_i(L) \quad (62)$$

O bien, matricialmente,

$$\mathbf{z}_{L,r} = [Bc_L] \mathbf{C} \quad (63)$$

Donde el vector  $\mathbf{C}$  apila los coeficientes de ajuste y la matriz  $[Bc_L]$  posee como columnas los vectores  $\mathbf{z}_{i,r}(L)$ .

En este punto debe hacerse una consideración adicional, en el caso en que el sistema permita plantearse de forma tal que  $\mathbf{z}_{L,r} = 0$ , se deberá evaluar la singularidad de la matriz  $[Bc_L]$  a través de su determinante. En este caso, la solución buscada será aquella formada por el polo que anule el determinante.

Si el caso analizado no permite formular un vector de condiciones de borde reducido nulo, deberá simplemente resolverse el sistema de la ecuación (63) para obtener los coeficientes  $C_i$ . Luego, la solución será:

$$\mathbf{z}(x) = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{z}_i(x) \quad (64)$$

## 5. RESULTADOS

La implementación del procedimiento planteado se lleva a cabo a través de un código computacional que implementa el método descrito en la sección 4. Para ello, es necesario definir los valores numéricos de los parámetros del problema. Para ilustrar la aplicación del método se considera una estructura arbitraria con los parámetros definidos en la Tabla 1.

Parámetro	Valor
Cuerda del Perfil	$C = 1 \text{ m}$
Envergadura	$b = 12 \text{ m}$
Pendiente de Sustentación	$C_{L\alpha} = 5,781 \text{ 1/rad}$
Densidad del Aire	$\rho_\infty = 1,225 \text{ Kg/m}$
Distancia entre EE y CA	$X_{ac} = 0,3156 \text{ m}$
Distancia entre EE y CG	$X_\theta = 0,1 \text{ m}$
Masa de la Sección	$m = 71,446 \text{ Kg/m}$
Momento Estático	$H = 7,1446 \text{ Kg}$
Momento de Inercia Másico (CG)	$I_0 = 5,0735 \text{ Kg m}$
Segundo Momento de Área	$I = 3,59e - 5 \text{ m}^4$
Momento Polar	$J = 1,27e - 5 \text{ m}^4$
Módulo de Elasticidad	$E = 7,3e 10 \text{ m}^4$
Módulo de Corte	$G = 2,7e 10 \text{ m}^4$

Tabla 1: Parámetros del modelo analizado.

Con estos valores, luego de cada proceso iterativo se obtiene el lugar de los polos del sistema, los cuales se ilustran en las Figura 5, Figura 6, Figura 7, Figura 8 y Figura 9, para valores de velocidad crecientes. Seguidamente, se unifican los resultados en un gráfico de lugar de raíces mostrado en la Figura 10.

Teniendo en cuenta la Figura 10, el valor de velocidad que anula el primer polo del sistema se estima en

$$V_{\infty Crit} = 65,4 \text{ m/s}$$

Es importante destacar, siguiendo la Figura 5 donde la velocidad de la corriente libre es nula, que los polos se ubican sobre el eje imaginario. Este resultado coincide con el hecho que, de no existir un fluido que interactuara con la estructura, se recupera el modelo estructural puro de vibración transversal libre.



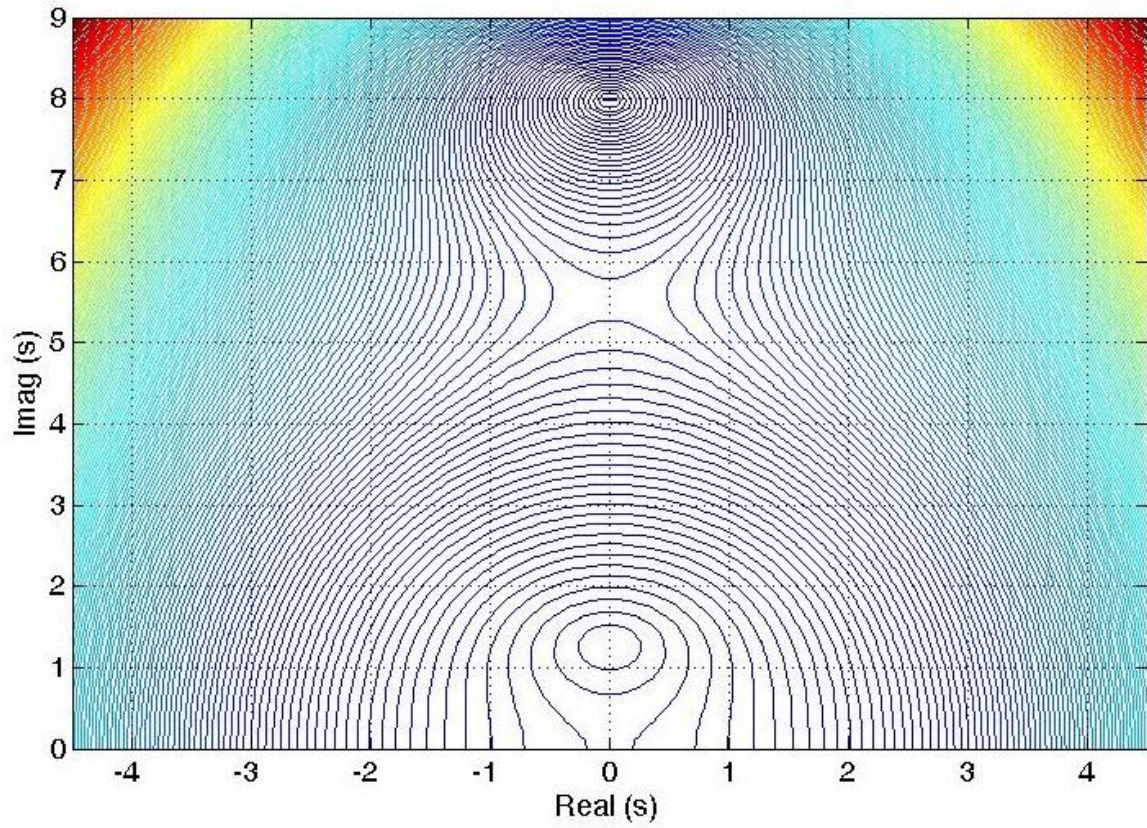


Figura 5: Polos del sistema,  $V_\infty = 0$  m/s

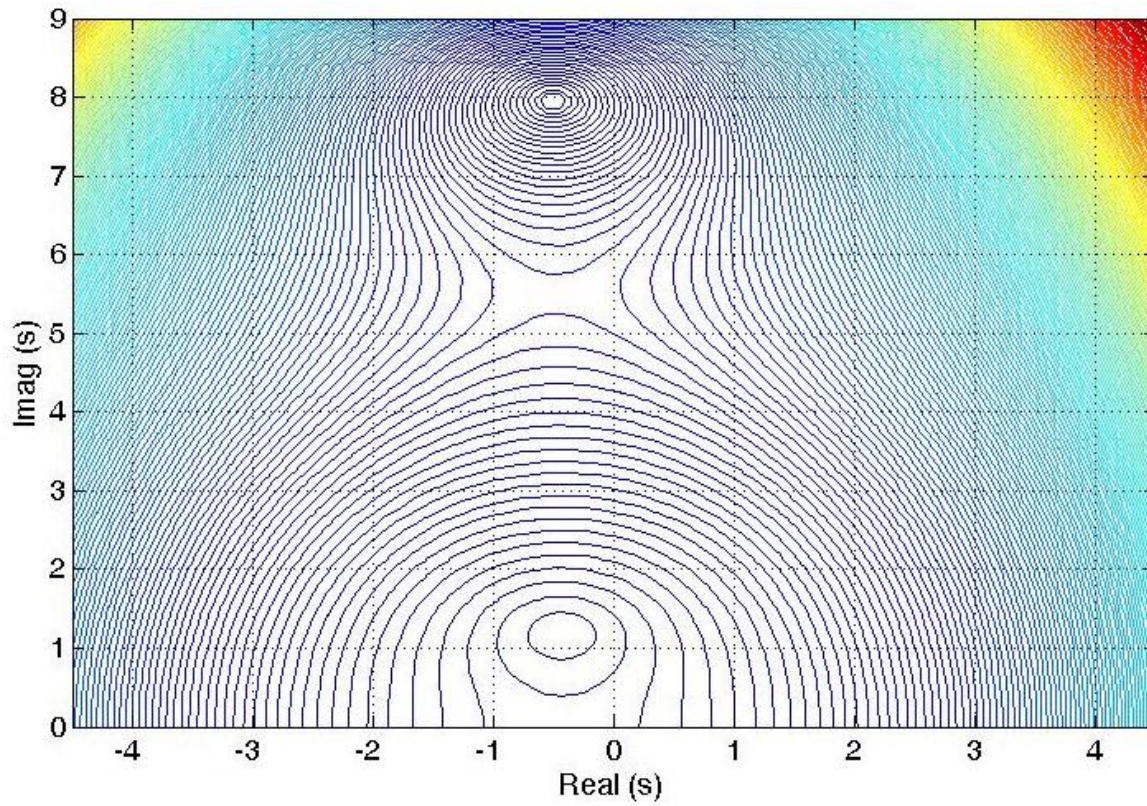


Figura 6: Polos del sistema,  $V_\infty = 10$  m/s



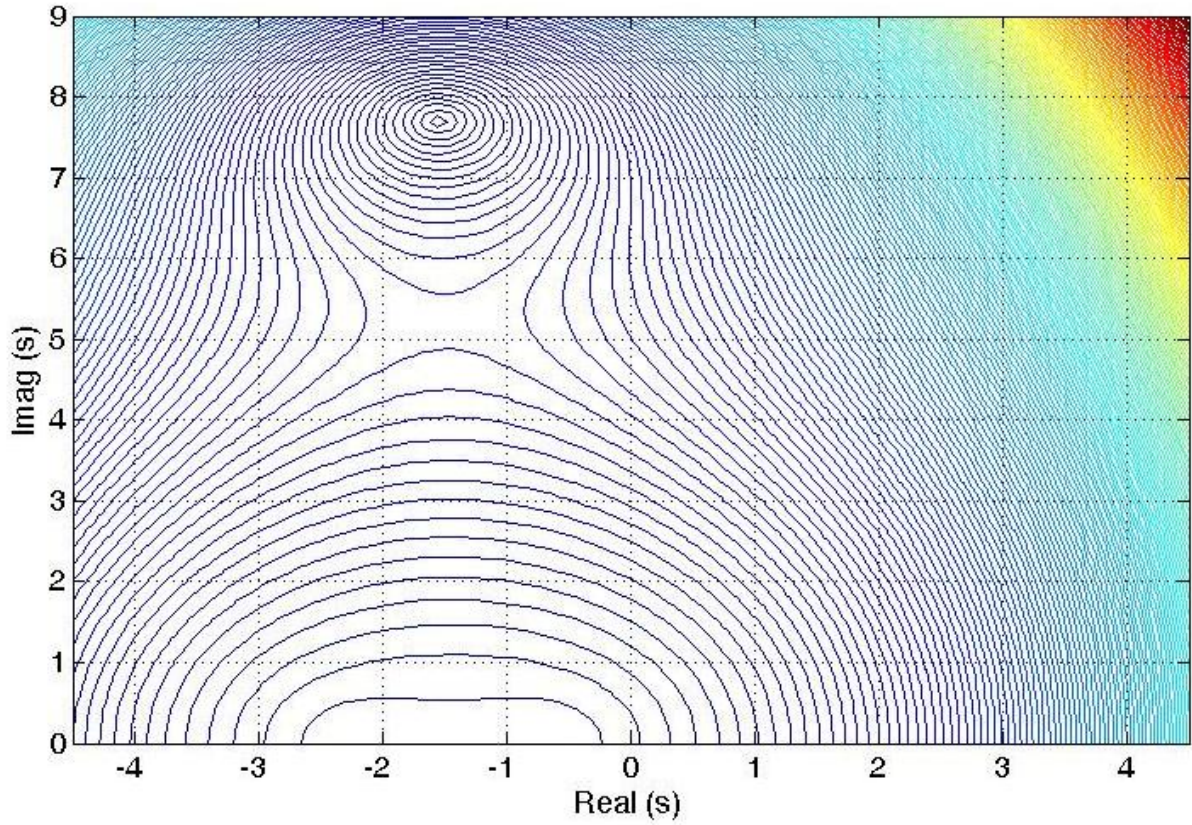


Figura 7: Polos del sistema,  $V_\infty = 30$  m/s

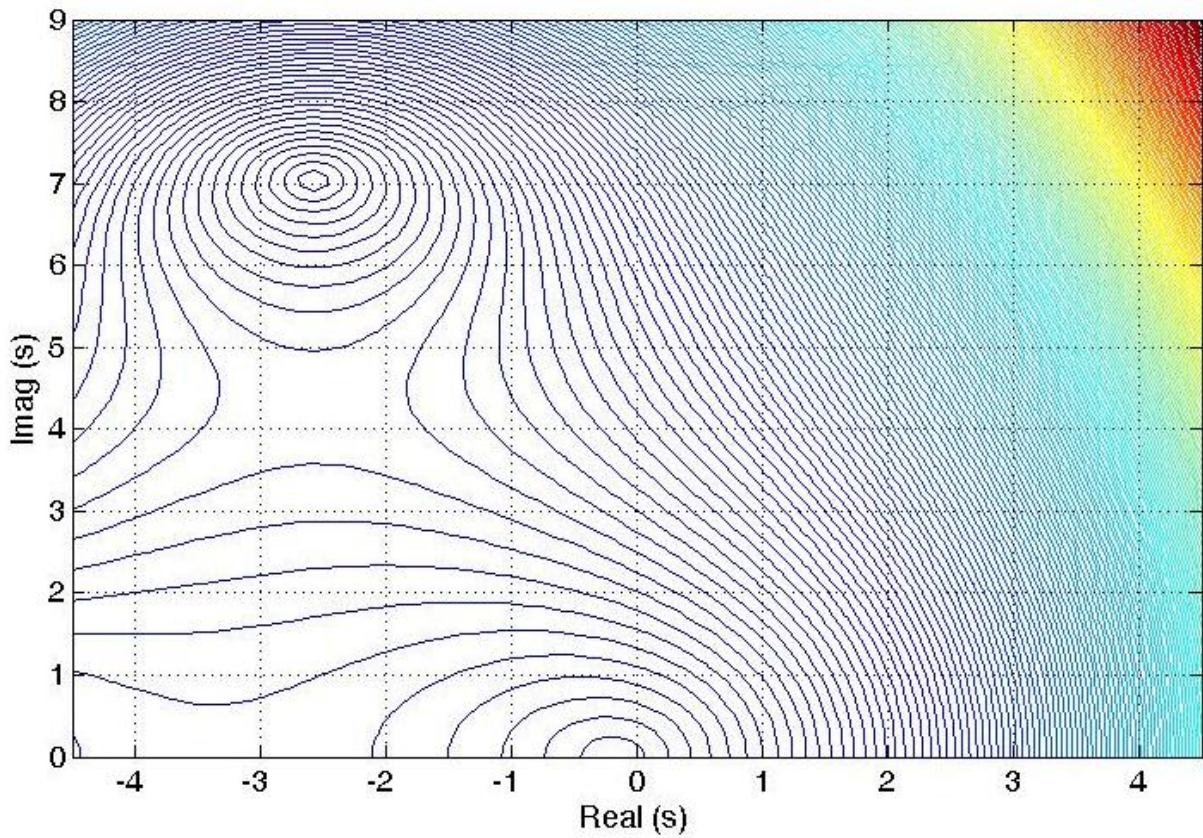


Figura 8: Polos del sistema,  $V_\infty = 50$  m/s



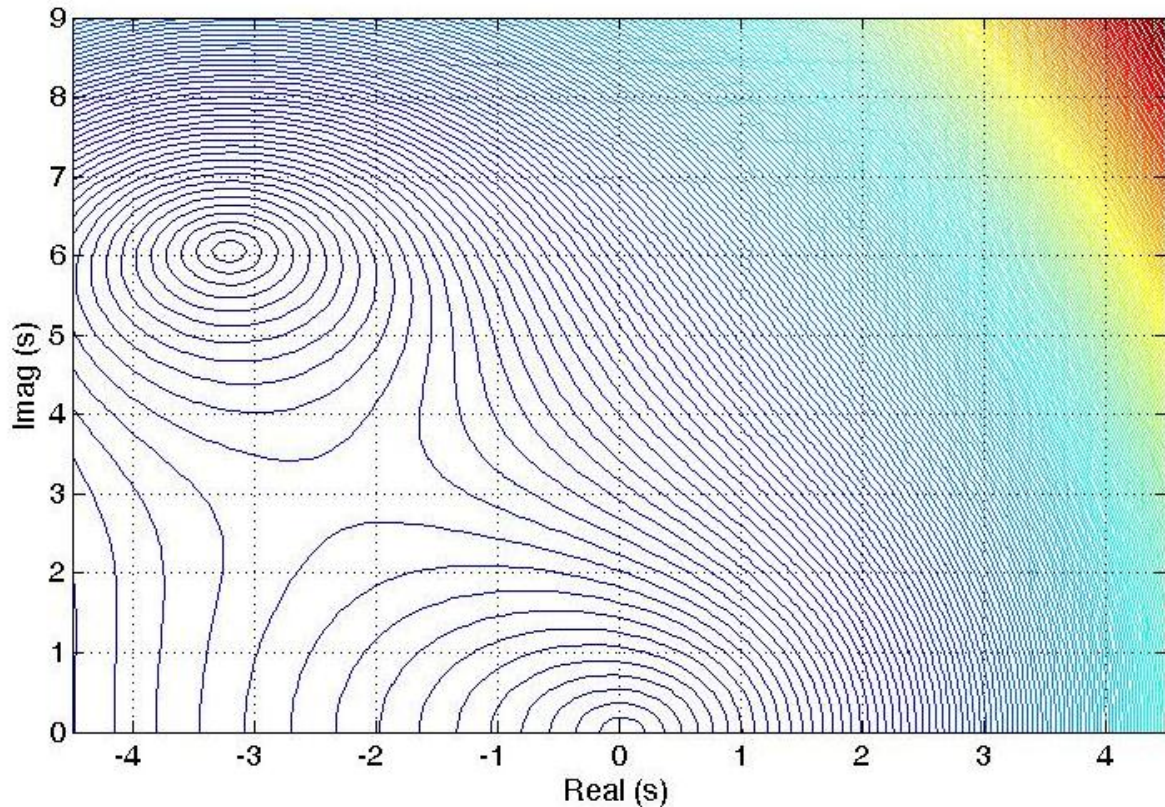


Figura 9: Polos del sistema,  $V_{\infty} = 70$  m/s

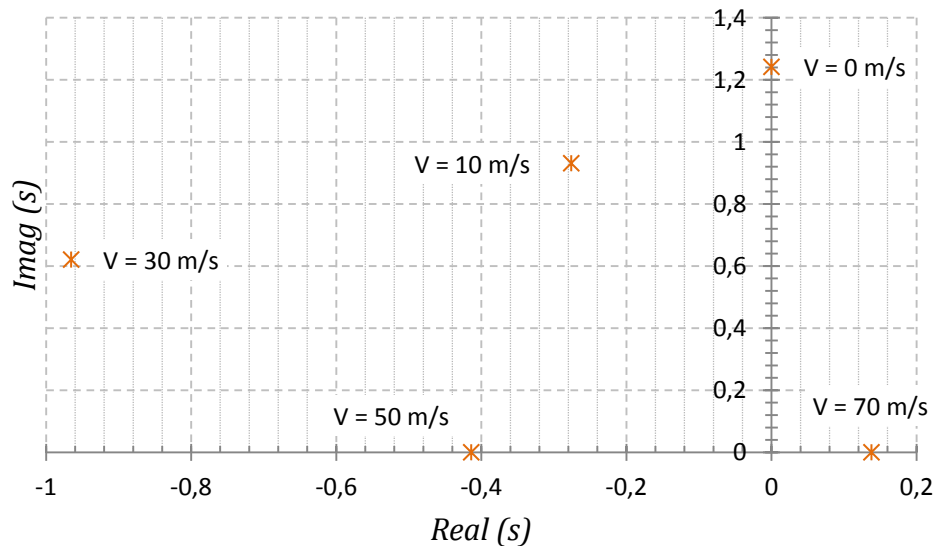


Figura 10: Lugar de raíces del sistema

## 6. COMPARACION DE RESULTADOS

Resulta útil siempre que se presenten desarrollos del tipo propuesto referenciar los resultados obtenidos con otros provenientes de distintas fuentes. Para ello, se recurren a dos trabajos que proponen análisis de casos similares al exhibido pero con metodologías diferentes a la aquí expuesta.

En primer lugar, se cita el trabajo de Valdez [5] que propone un modelado según el método de elementos finitos (FEM) para un elemento estructural tipo viga que contempla la interacción con fluido. Este modelo incorpora la aerodinámica cuasi-estacionaria bidimensional e identifica la velocidad crítica de la corriente libre como la que genera el primer valor propio nulo del sistema.

Compatibilizando la metodología aquí dada con los parámetros del trabajo de Valdez, se obtiene una velocidad crítica de  $V_{\infty Crit} = 105,4 [m/s]$ , mientras que el valor obtenido por Valdez es  $V_{\infty Crit} = 130,2 [m/s]$ . Luego, la discrepancia es alrededor del 24%.

El segundo resultado a comparar es el planteado por Hodges y Pierce [1] quienes proponen una expresión analítica para la presión dinámica de divergencia torsional. Esta expresión es obtenida de un modelo estructural-aerodinámico que considera sólo el campo torsional en su análisis. Luego, la omisión del campo flexural produce discrepancias en la rigidez y el amortiguamiento totales del sistema, posiblemente subestimándolos. No obstante esto, postulan que el punto crítico ocurre para

$$q_d = \frac{GJ \pi}{2 X_{ac} C} \left( \frac{1}{2b} \right)^2 \quad (65)$$

Donde, incluyendo la definición de presión dinámica, la velocidad crítica resultará:

$$V_{\infty Crit} = \sqrt{\frac{2}{\rho_{\infty}} q_d} \quad (66)$$

Finalmente, reemplazando los parámetros y calculando se tiene que  $V_{\infty Crit} = 69,55 [m/s]$ . El valor obtenido resulta un 6% mayor, lo que sería razonablemente coherente con la inclusión de un único campo de deformaciones.

## 7. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se desarrolló un modelo de viga con interacción aerodinámica para estimar velocidades de flameo (flutter) y/o divergencia. Se aplicó un procedimiento práctico de análisis y resolución aplicable a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes variables. Dando, además, un enfoque a problemas multifísicos de tipo IFE.

No debe perderse de vista que el modelo planteado supone un alto grado de simplificación de los fenómenos involucrados, sobre todo a la hora de interpretar los resultados obtenidos. No obstante esto, si se tiene en cuenta la reducción en tiempos de procesamiento e implementación por no requerirse la modelación del fluido, el balance general es positivo.

Existen áreas no tratadas que revisten interés para profundizar la línea de trabajo planteada. Primeramente, resultaría conveniente investigar el uso un modelo aerodinámico más completo y cómo esto afecta el procedimiento descrito. En segundo lugar, resulta de interés establecer los límites de validez del modelo planteado comparando los resultados con un método basado en la discretización como la red de vórtices y/o métodos de elementos finitos. También es posible ahondar sobre los algoritmos a utilizar para la búsqueda de polos en modelos continuos con el fin de lograr mayor eficiencia computacional. Adicionalmente, sería conveniente realizar un análisis de sensibilidad de los parámetros intervinientes como así también del proceso de adimensionalización de variables para el cálculo. En definitiva, el trabajo sienta una base interesante para continuar con el desarrollo de la metodología.

## REFERENCIAS

- [1] D. H. Hodges and G. A. Pierce, *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*, Atlanta, USA: Cambridge Aerospace Series, 2002.
- [2] R. W. Clough and J. Penzien, *Dynamics of Structures*, Berkeley CA, USA, Computers & Structures, Inc, 2003.
- [3] J. D. Anderson Jr., *Fundamentals of Aerodynamics, Fifth Edition*, New York, USA, Mc Graw Hill Companies, Inc, 2011.
- [4] F. W. Diederich, *A Simple Approximate Method For Calculating Spanwise Lift Distribution and Aerodynamic Influence Coefficients at Subsonic Speed*, Technical Note 2751, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), Washington USA, 1952.
- [5] M. F. Valdez, *Modelación de un elemento de viga para un análisis de aeroelasticidad*, Córdoba, Argentina, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, UNC, 2005.