

DESARROLLO DE UNA UNIDAD INERCIAL PARA LA ESTIMACIÓN DEL ÁNGULO DE ROLIDO DE UNA AERONAVE

Santiago F. Scandolo^a, Santiago García Bravo^b, Marcelo Buteler Aliaga^b y Ladislao Mathé^b

^a *IV Brigada Aérea, Grupo Técnico 4, Mendoza, Argentina*

^b *Grupo Guiado y Control, Centro de Investigaciones Aplicadas, Instituto Universitario Aeronáutico. Av. Fuerza Aérea 6500, Córdoba, Argentina, cia@iua.edu.ar, <http://www.iua.edu.ar>*

Palabras Clave: Inercial, Kalman, Complementario, IMU.

RESUMEN: A lo largo de este trabajo se estudian dos métodos para determinar el ángulo de rolido de un cuerpo que se encontrará en vuelo de planeo durante aproximadamente cinco minutos. Los métodos son: (i) filtros complementarios, (ii) filtro extendido de Kalman.

El movimiento angular que se determinará está dado por dos sensores independientes a saber: (a) acelerómetro de dos ejes ortogonales y (b) girómetro. Se propuso, entonces la construcción de un péndulo que funcionará como plataforma de simulaciones y pruebas durante la primera etapa del desarrollo del proyecto. Las señales de los sensores, ya montados sobre la plataforma, fueron adquiridas y almacenadas para su posterior análisis y procesamiento utilizando la placa PCI – 6023 – E de National Instruments.

El desarrollo de los programas de reconstrucción de señales, acondicionamiento, calibración y filtrado se realizó en el entorno de programación por bloques de LabVIEW. Los resultados obtenidos por cada uno de los métodos estudiados fueron analizados y comparados hasta lograr el óptimo comportamiento para cada uno.

Luego se procedió a optimizar los algoritmos resultantes de la etapa anterior, para poder así implementarlos en un mismo microcontrolador PIC 18F452 de Microchip. Pudiendo lograr el funcionamiento de los dos métodos en una misma pastilla, se midió el costo computacional de cada uno y además, evaluar la respuesta de cada proceso de cálculo en tiempo real.

Por último se integraron todos los componentes necesarios para el funcionamiento de la plataforma inercial de un grado de libertad lograda, para obtener así una placa de diseño compacto que permite ser empleada por cualquier usuario. Los resultados obtenidos son contrastados con mediciones tomadas de un potenciómetro lineal de bajo rozamiento que se encuentra asociado al eje del péndulo de pruebas.

Como extensión del trabajo propuesto, se decidió evaluar los procesos anteriores en la situación que la plataforma pueda moverse libremente. De este modo se perturbó al sistema según sus condiciones futuras de operación. Los resultados para este caso son contrastados con las estimaciones de la plataforma de mediciones inerciales de tres grados de libertad, MTi-28 A53 G35 de XSENS.

1 INTRODUCTION

El avance de la electrónica ha permitido, en el ámbito aeronáutico, el desarrollo de plataformas aéreas no tripuladas (UAV's) que permiten cumplir con diferentes tareas tanto en el ámbito militar como civil, a un costo significativamente menor que con aeronaves tripuladas.

El desarrollo de este tipo de aeronaves implica el avance en diferentes tecnologías que implican un novedoso ámbito de investigación, en donde la premisa es lograr la máxima eficiencia de los sistemas pero con el menor costo posible.

Un sistema fundamental en este tipo de aeronaves, es el piloto automático, ya que el mismo tiene como función reemplazar al piloto humano, realizando las tareas de navegación y control de la aeronave, permitiendo de esta manera, el vuelo en forma eficaz y segura.

El avance en sistemas computarizados ha permitido implementar adecuados sistemas de control, mediante algoritmos implementados por hardware de bajo costo y dimensiones adecuadas para el tipo de aeronaves en cuestión. Pero como todo sistema de control, el lazo de realimentación es fundamental, y en aeronáutica, este tipo de realimentación se hace mediante el empleo de unidades inerciales, que otorgan mediciones sobre posición angular alrededor de los 3 ejes de libertad (cabeceo, alabeo y guiñada) y traslación en el espacio.

Estos sistemas de control forman parte de los sistemas de piloto automático, integrándose las unidades inerciales con sistemas como el GPS, para obtener mayor precisión en la navegación.

Desde el punto de vista económico, unidades inerciales de reducido peso y dimensiones, se consiguen en el mercado a precios que se encuentran en el orden de los miles de dólares, dependiendo del fabricante y las especificaciones del modelo. Un desarrollo nacional de este tipo permitiría una significativa disminución de costos, y el desarrollo de tecnologías troncales para los UAV's.

El punto fundamental a tener en cuenta para el desarrollo de unidades inerciales de bajo costo, se encuentra en el procesamiento de las señales de los sensores inerciales utilizados (acelerómetros, girómetro y magnetómetros). Todos estos sensores son de amplia utilización en diferentes ámbitos como el industrial, y los de tipo electrónico permiten una adecuada integración con sistemas computarizados.

A un sistema de navegación inercial-GPS, se lo podría dividir conceptualmente en tres subsistemas:

- Orientación espacial: mediante el uso de sensores inerciales, se establece la posición angular de la aeronave alrededor de los 3 ejes de referencia a saber: cabeceo, alabeo y guiñada.
- Traslación espacial: estima el movimiento de la aeronave en el espacio, definiendo su velocidad y posición instantánea, con respecto a un punto de referencia debidamente identificado. Para esta estimación, se debe conocer con exactitud la orientación espacial del vehículo.
- Fusión con el GPS: a fin de minimizar los errores de navegación por el sistema inercial, la información entregada por el mismo se fusiona con la información del sistema GPS, lo que resulta en una estimación de mayor precisión.

En el presente trabajo se considera el primer subsistema en su forma más básica: medir posición angular alrededor de un solo eje de referencia. La finalidad de esto es introducirse en los métodos de procesamiento comúnmente utilizados en todo sistema inercial, obteniendo resultados que sirvan para avanzar en sistemas más complejos que den lugar a un sistema de

navegación inercial-GPS.

El sistema sobre el que se trabajó, es el que se describe en forma general en la Figura 1. Se utiliza la placa IMU Combo V1 para sensar aceleraciones de gravedad en dos ejes (acelerómetro ADXL203) y velocidad angular (girómetro ADXRS401) en el eje sobre el que se desea obtener posición angular, las señales analógicas se adquieren con el PIC 18F452 y se procesan mediante los filtros implementados por software en él. La posición angular estimada se transmite por comunicación serial RS232 para ser utilizado en un hipotético sistema de control computarizado.

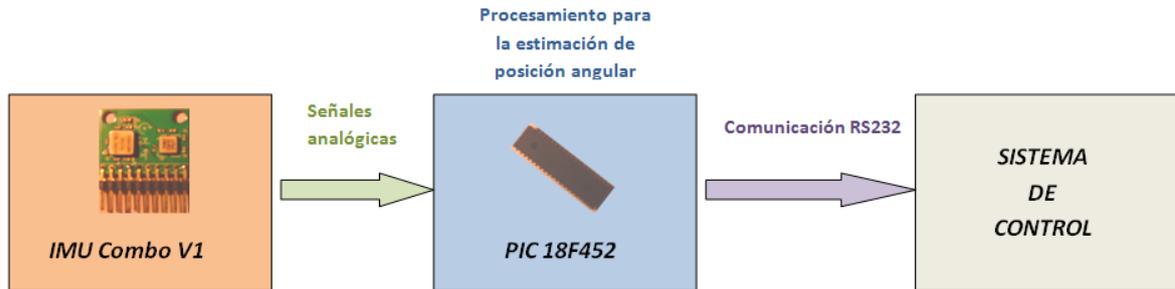


Figura 1: Esquema del Sistema Propuesto

2 SENSORES INERCIALES UTILIZADOS

Para el presente trabajo se ha utilizado la IMU Combo V1, una placa que integra dos sensores inerciales de Analog Devices: un acelerómetro de 2 ejes (ADXL203) y un girómetro de un eje (ADXRS401).

El acelerómetro sensa las aceleraciones sobre dos ejes ortogonales, entregando una tensión cuya amplitud es proporcional al valor de aceleración sensado en ese eje. Si se coloca al plano formado por los ejes de sensado en forma paralela al campo gravitacional terrestre, obtendremos el vector gravedad descompuesto en los dos ejes. Mediante la función trigonométrica arco tangente, se puede obtener entonces el ángulo que forma el vector gravedad con respecto a un eje en particular, lo que se traduce en definitiva, en el ángulo de rotación alrededor de eje perpendicular al plano de sensado, pudiéndose obtener así ángulo de rolido o ángulo de cabeceo. El inconveniente de estos tipos de sensores, es que no solo sensan las fuerzas gravitacionales, sino también las aceleraciones correspondientes a vibraciones de la estructura sobre la cual están montados. Estas aceleraciones se traducen en variaciones de posición angular calculadas, lo que desemboca en errores de medición del sistema.

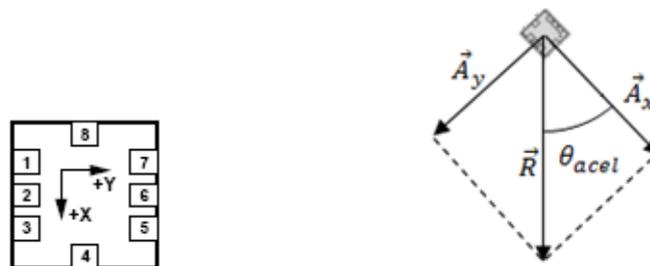


Figura 2: Esquema de Descomposición de Aceleraciones

$$\theta = \theta_{acel} = \arctg\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \frac{180^\circ}{\pi} = [^\circ] \quad (1)$$

El girómetro sensa velocidades angulares alrededor de un eje, y el voltaje de salida también es proporcional a dicha velocidad. Se puede calcular posición angular a partir del girómetro integrando la señal de velocidad angular otorgado por el mismo. Esto se hace digitalmente realizando la sumatoria del producto de cada muestra (v_i) por el período de muestreo ($T_s = 0,01s$ para $f_s = 100Hz$):

$$\theta_{gyro} = \sum_{i=0}^{N} v_i \cdot T_s = \left[\frac{\circ}{seg} \cdot seg \right] = [^{\circ}] \quad (2)$$

El inconveniente que presenta este tipo de sensor es que la velocidad angular no es un valor constante sino que oscila aleatoriamente. Esto no es un inconveniente si lo que se desea es medir velocidad angular, pero la integración de esta señal implica una sumatoria de términos, en los cuales, todo factor de error, por más pequeño que sea, se suma iterativamente, generando un error creciente con el tiempo. Este fenómeno se conoce como *DRIFT*.

Las siguientes figuras muestran las estimaciones de la posición angular mediante el acelerómetro y el girómetro. Vale aclarar que se implementó un sistema de péndulo mecánico asociado a un potenciómetro para obtener una señal de referencia a fin de comprobar el comportamiento de los sensores.

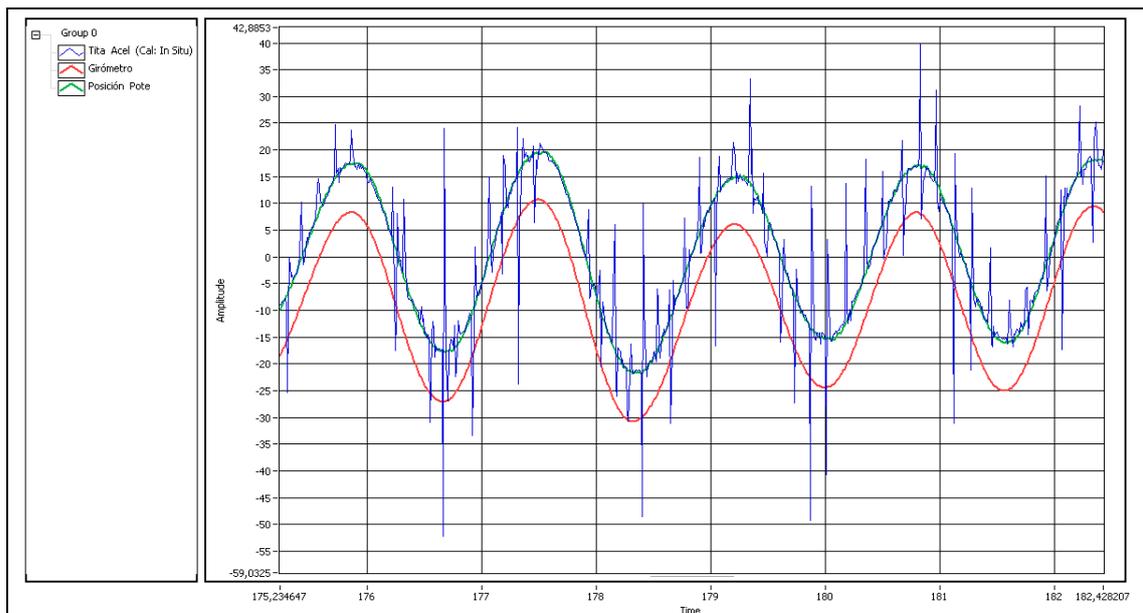


Figura 3: Posición Verdadera (Verde), Posición Estimada Por Acelerómetro (Azul), Posición Estimada Por Girómetro (Rojo)

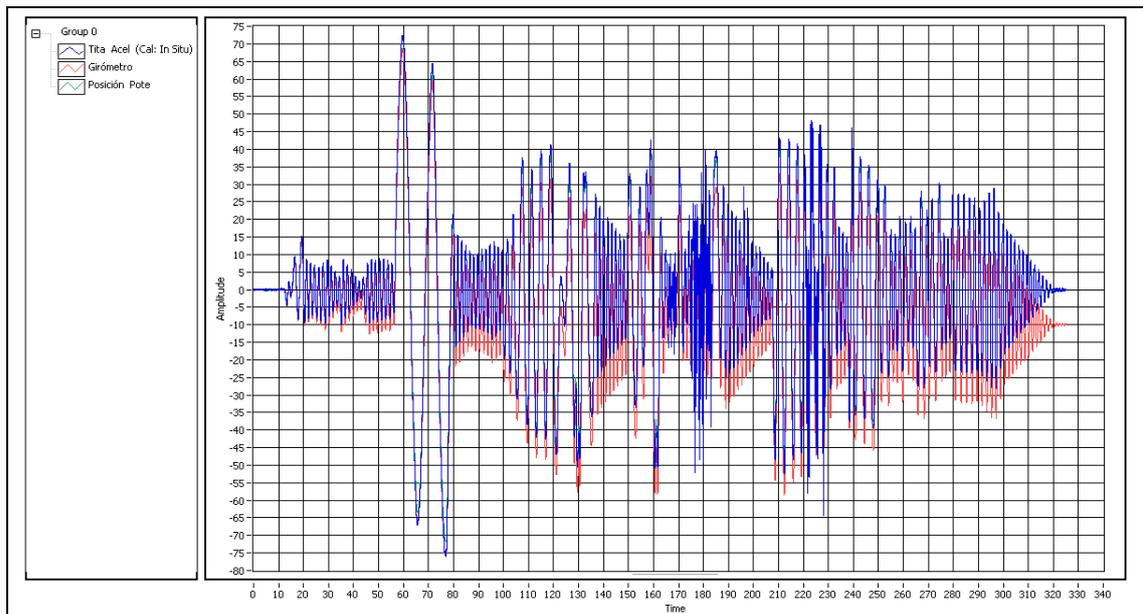


Figura 4: Vista del ensayo completo en donde se puede apreciar con mayor claridad el drift del girómetro (rojo).

Se hace necesario entonces realizar un procesamiento de las señales a fin de corregir o minimizar los errores de estimación de la posición angular, para lo cual existe dos métodos que combinan la señal de ambos sensores obteniendo así una única estimación de posición angular. Estos métodos son: Filtros Complementarios y Filtros de Kalman.

3 FILTROS COMPLEMENTARIOS

Si consideramos dos filtros lineales en invariantes en el tiempo $F_1(s)$ y $F_2(s)$ con las siguientes propiedades:

$$\lim_{s \rightarrow 0} F_1(s) = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F_2(s) = 0$$

$$F_1(s) + F_2(s) = 1 \tag{3}$$

$$F_2(s) = 1 - F_1(s) \tag{4}$$

Así, $F_1(s)$ es un filtro pasaaltos, $F_2(s)$ es un filtro pasabajos y $F_1(s) + F_2(s)$ es un filtro con banda de paso infinita. Ahora consideremos el arreglo de filtros en paralelo como en la Figura 5:

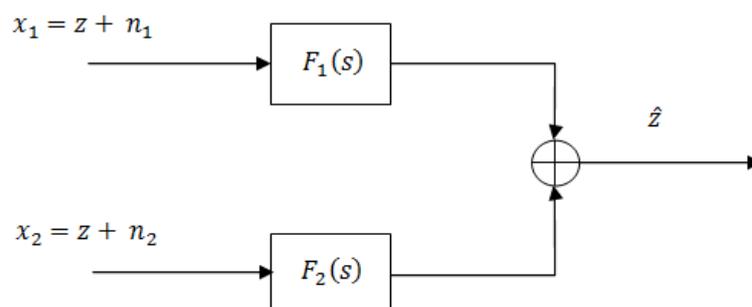


Figura 5: diagrama En Bloques De La Aplicación Del Método de Filtros Complementarios.

Donde x_1 y x_2 son las dos respectivas lecturas de los sensores de la misma variable z , mientras que n_1 y n_2 representan el ruido que produce el error en la medición del sensor. Su suma filtrada es:

$$\hat{z}(s) = [F_1(s) + F_2(s)] z(s) + F_1(s) n_1(s) + F_2(s) n_2(s)$$

Reemplazando por ecuaciones (3) y (4)(3)

$$\hat{z}(s) = z(s) + [1 - F_2(s)] n_1(s) + F_2(s) n_2(s) \quad (5)$$

Si asumimos que n_1 es de banda angosta y baja frecuencia, y n_2 es de banda ancha, entonces n_1 es bloqueado mientras que n_2 es atenuada por el filtro pasabajos. Además, la señal deseada z no es afectada y ambas fuentes de ruido atenuadas.

Considerando ahora el caso particular de un sistema que utiliza los sensores inerciales que se ha descrito, se demuestra que en el caso del acelerómetro el ruido en la medición es de banda ancha y el ruido en el girómetro (drift) es de banda angosta y baja frecuencia, por lo tanto, el sistema de filtros complementarios, de acuerdo a la figura 4 es el siguiente:

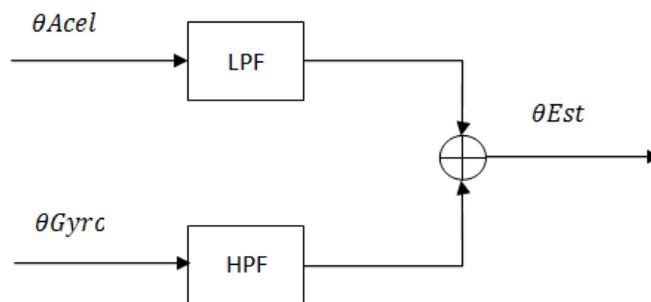


Figura 6: Esquemático De La Sumatoria De Las Estimaciones

De acuerdo a la ecuación (3)

, el diseño de los filtros debe ser tal que, sumando las salidas de los mismos, se obtenga magnitud unitaria. Esto implica que los filtros deben tener características complementarias en **magnitud y fase**.

Estas características dependerán del orden y frecuencia de corte de los filtros. La comprobación de las características complementarias se realiza algebraicamente con la transformada de Laplace de los filtros. A continuación se presentan la comprobación para filtros de Butterworth de primer orden e igual frecuencia de corte:

Filtros de 1° orden y frecuencia de corte en 1 rad/seg:

$$F_{LP}(s) = \frac{1}{s+1} ; F_{HP}(s) = \frac{s}{s+1}$$

$$F_{LP}(s) + F_{HP}(s) = 1$$

$$\frac{1}{s+1} + \frac{s}{s+1} = \frac{1+s}{s+1} = 1 \quad (6)$$

Se cumple entonces la complementariedad de los filtros. En caso de que los filtros sean de primer orden y distinta frecuencia de corte, o de segundo o mayor orden, se demuestra por el mismo método que no se cumple la característica de complementariedad (Merhav96).

Considerando que la implementación de los filtros será en un microcontrolador, los mismos deben ser digitales. Existen dos tipos de filtros digitales, los de Respuesta Finita al Impulso (FIR) y los de Respuesta Infinita al Impulso (IIR). En este caso se eligió utilizar

filtros IIR, los cuales se obtuvieron a partir de filtros de Butterworth mediante la transformación Z con retenedor de orden cero, para una frecuencia de corte de 1,5 Hz y una frecuencia de muestreo de 100 Hz:

$$G_{LP}(s) = \frac{9.425}{s+9.425} \xrightarrow{ZOH} G_{LP}(z) = \frac{0.0899z^{-1}}{1-0.9101z^{-1}} \quad (7)$$

$$n_y = \frac{f_{ny}}{f_c} = \frac{100\text{Hz}}{1.5\text{Hz}} = 66.7 \quad (8)$$

$$G_{HP}(s) = \frac{s}{s+9.425} \xrightarrow{ZOH} G_{LP}(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-0.9101z^{-1}} \quad (9)$$

4 FILTRO DE KALMAN

El filtro de Kalman es un estimador para lo que se conoce como el problema lineal-cuadrático, que es el problema de estimar el estado instantáneo de un sistema dinámico lineal perturbado con ruido blanco, usando medidas relacionadas linealmente al estado pero corrompidas por el ruido. El estimador resultante es óptimo estadísticamente con respecto a cualquier otra función cuadrática de estimación del error (Welch y Bishop06).

Dicho de otra forma, el filtro de Kalman es una solución recursiva para el problema de filtrado de datos lineales discretos corrompidos por ruido blanco.

Existen aplicaciones en las que el sistema no es lineal, pero que sí es suave; es decir las dependencias de las mediciones, o de la dinámica del sistema, no son lineales pero sí son *aproximadamente* lineales en torno de pequeñas *perturbaciones* alrededor de los valores de las variables de estado.

En estos casos se podrían aplicar métodos de estimación lineal analizando el efecto de pequeñas perturbaciones del estado de un sistema no lineal a partir de una trayectoria *nominal*. Esto es sin duda, una solución que además permitiría economizar recursos de cómputo en el procesador ya que se pueden calcular ciertos parámetros de antemano y luego programarlo para aplicaciones en tiempo real. Sin embargo el sistema que se estudia aquí no tiene una trayectoria nominal, y esta opción no es posible.

Por otro lado, la trayectoria nominal sí puede ser aproximada en tiempo real, a partir de una *mejor estimación* de la trayectoria. Esta forma de enfrentar el problema es conocida como filtro extendido de Kalman, o EKF.

A continuación se presentará el modelo de Kalman Bucy, que es una variante del EKF para procesos continuos. Se considera un estado $x \in R^n$ que se desea estimar, estando afectado por la covarianza del ruido del proceso $w(t)$, a partir de mediciones $z \in R^m$ afectadas por la covarianza del ruido medición: $v(t)$.

$$\dot{x} = F(t)x(t) + G(t)w(t) \quad (10)$$

$$z(t) = H(t)x(t) + v(t) \quad (11)$$

Donde, $F(t)$, es la función diferencial que relaciona x con \dot{x} en ausencia absoluta de cualquier función de guiado, o ruido del proceso, y $H(t)$ relaciona los estados con las mediciones en cada paso.

Y se lo estima mediante:

$$\hat{x}(t) = F(t)\hat{x}(t) + K(t)[z(t) - H(t)\hat{x}(t)] \quad (12)$$

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F(t)^T + Q(t) - K(t)R(t)K(t)^T \quad (13)$$

$$K(t) = P(t)H(t)^T R(t)^{-1} \quad (14)$$

Donde la derivada respecto del tiempo se ha señalado enfatizando la variable con un punto.

Nótese que en las ecuaciones anteriores se encuentran unificadas las ecuaciones correspondientes al pronóstico en el tiempo y a las correcciones sobre las mediciones.

Existe además una modificación al filtro de Kalman Bucy, en el cual se combinan ecuaciones de tiempo continuo con las de tiempo discreto. Este método se llama método de tiempo continuo-discreto, que básicamente significa modelar el pronóstico en el tiempo según el modelo continuo, y pasar estas estimaciones a la etapa de corrección de las mediciones luego de haberlas integrado (Ramachandra00) Por lo tanto la ganancia de Kalman se vuelve a calcular como en el caso discreto:

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} \quad (15)$$

Que es la correcta forma de calcular la ganancia de Kalman para casos en que no se cumple la condición de continuidad ($\Delta t \rightarrow 0$). Ahora sí se procede a explicar el mecanismo del filtro extendido de Kalman.

4.1 El proceso a estimar

En este caso se supondrá que un sistema estocástico continuo (modelo de Kalman-Bucy) puede ser representado por una planta no lineal y un modelo de medición dado por:

$$\dot{x} = f(x, t) + w(t) \quad (16)$$

$$z(t) = h(x(t), t) + v(t) \quad (17)$$

Donde f y h son funciones continuamente diferenciables del vector de estado x .

Nótese ahora que el EFK, es un estimador sólo para casos de no linealidad, donde las variables normales, w y v ya no tendrán comportamiento gausseano al haberseles aplicado una transformación no lineal. Por lo tanto, el EKF es simplemente una óptima aproximación a la regla de Bayes por linealización (Maybeck).

4.2 Linealización en torno a una trayectoria

La trayectoria es una solución particular de un sistema estocástico, y para un sistema continuo se refiere a la función $x(t)$ definida para todo $t \geq 0$.

El término perturbación describe el menor cambio en la trayectoria debido a fuerzas secundarias. Si f es continuamente diferenciable infinitamente, entonces la influencia de las perturbaciones en una trayectoria pueden ser representados por una expansión en series de Taylor alrededor de la trayectoria nominal. La probabilidad de la magnitud de las perturbaciones está determinada por las varianzas de las variables involucradas.

Se define como perturbación entonces:

$$\delta \dot{x}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}(t)_{\text{nom}} \quad (18)$$

$$\delta z(t) = z(t) - h(\dot{x}(t)_{\text{nom}}, t) \quad (19)$$

La expansión en serie de Taylor alrededor de la trayectoria nominal queda:

$$\dot{x}(t) = f(x_{\text{nom}}, t) + \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial x(t)} \right|_{x(t)=x(t)_{\text{nom}}} (x(t) - x(t)_{\text{nom}}) + \vartheta^2$$

Descartando los términos de orden superior ϑ^2 , y recordando la definición de perturbación se reescribe la ecuación anterior como:

$$\delta \dot{x}(t) = \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial x(t)} \right|_{x(t)=x(t)_{\text{nom}}} \delta x + w(t)$$

$$\delta \dot{x}(t) = F\delta x + w(t) \quad (20)$$

Análogamente,

$$\delta z(t) = \left. \frac{\partial h(x, t)}{\partial x(t)} \right|_{x(t)=x(t)_{\text{nom}}} \delta x + v(t)$$

$$\delta z(t) = H\delta x + v(t) \quad (21)$$

Donde $F(t)$ y $H(t)$ son los jacobianos de las funciones correspondientes (Grewal y Angus01).

Para ahora realizar esta estimación alrededor de la trayectoria estimada se debe remplazar la trayectoria nominal por la estimada. Es decir evaluar la serie de Taylor en este nuevo entorno. Si el problema es suficientemente observable—como evidencia la incertidumbre de la covarianza de la estimación—entonces las desviaciones entre lo estimado y lo verdadero se mantendrán suficientemente pequeñas como para que las suposiciones anteriores (descartar términos de orden superior) sigan siendo válidas.

4.3 Algoritmo del filtro de Kalman

Una vez presentadas las características y orígenes del filtro de Kalman, así como también las suposiciones sobre el proceso a estimar, se presentan a continuación las ecuaciones de cada una de las etapas del filtro. Este comienza con una estimación inicial del estado x y de la matriz P que bien pueden ser un vector cualquiera y la matriz identidad. Luego se ejecutarán recursivamente las ecuaciones que se presentan a continuación en la medida que vayan ingresando al algoritmo las mediciones para cada paso k del filtro.

Ecuaciones predictivas:

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \quad (22)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (23)$$

Ecuaciones Correctoras:

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (24)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (25)$$

$$P_k = (I - K_k H)P_k^- \quad (26)$$

Las ecuaciones se ejecutan de la (22) a la (26) recursivamente, y por cada paso k se obtiene una estimación óptima del vector de estado x .

4.4 Modelo EKF propuesto

Tomar la lectura del acelerómetro directamente para la determinación de la posición, resulta en una trayectoria intrínsecamente afectada por el ruido del acelerómetro. Si en cambio ahora se piensa en pronosticar con la medición del girómetro y corregirla con la medición del acelerómetro, se tendrá un sistema que aproveche las mejores características de ambos sensores. Entonces el filtro de Kalman no responderá a un modelo lineal en la trayectoria sino más bien funcionará minimizando el error entre ambas mediciones.

Este mismo modelo es el que utiliza el algoritmo de un software de piloto automático de libre licencia bajo los términos de la GNU, denominado *Autopilot*. A continuación se explica en detalle el modelo que se consideró en este trabajo que es según el piloto automático de licencia libre y gratuita de acuerdo con los términos de la GNU.

Se define el vector de estados:

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \Delta\dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Donde $\Delta\dot{\theta}$ es el sesgo del girómetro, y θ el ángulo a estimar. La función f para pronóstico del estado será:

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \Delta\dot{\theta} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} z_{gyro} - \Delta\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como se puede ver, esta función aplicada al vector es una aproximación a la derivada con respecto del tiempo en la cual se toma la lectura del girómetro (z_{gyro}) corregida por la estimación anterior de la desviación del girómetro. Además, presupone que el sesgo es constante por lo que la segunda componente del vector \dot{x} siempre es cero.

También nótese que la medición z_{gyro} no tiene relación con el vector de estado x . Esto tendrá sus consecuencias cuando se determine la matriz H .

Se está ahora en condiciones de calcular la matriz F dada por:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f(x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(z_{gyro} - \Delta\dot{\theta})}{\partial \theta} & \frac{\partial(z_{gyro} - \Delta\dot{\theta})}{\partial \Delta\dot{\theta}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector de mediciones será:

$$z = [\theta_{acel}] \quad (28)$$

Ya que no hay mediciones directas del sesgo del girómetro, el vector de mediciones contiene solo lecturas de posición a partir de los acelerómetros.

La función h que relaciona el estado con las mediciones es:

$$z = h(x, t) = [\theta]$$

Por lo que el jacobiano de h resulta:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x_1)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} & \frac{\partial \theta}{\partial \Delta\dot{\theta}} \end{bmatrix}$$

$$H = [1 \quad 0]$$

Finalmente, se aclara que dadas las dimensiones del vector z , la matriz R será de dimensión 1×1 . La matriz Q será sin embargo de 2×2 .

Este modelo de filtro se caracteriza por aproximar a la función $\dot{\theta}$ por una medición, que es corregida sólo en su sesgo. Por lo tanto, supone que la medición z_{gyro} no tiene error propio más allá del sesgo del girómetro. Esta suposición no es cierta, pero será compensada en el valor del elemento de la matriz de la covarianza de estimación, q_{11} . Esto quiere decir que ahora q_{11} abarca la varianza de la medición z_{gyro} .

Otra característica de este modelo es que la segunda componente del vector estado, $\Delta\dot{\theta}$ no es medida en ningún momento. Para explicar esto, se deberá primero observar que el estado de la variable es actualizado a partir la corrección entre el ángulo estimado y el medido. Visualícese entonces las correcciones alrededor de la trayectoria verdadera. Estas correcciones serán en exceso y luego en defecto, oscilando alrededor del valor verdadero. El sesgo estará, sin duda, comprendido entorno estas estimaciones.

Por otro lado, se sabe que el sesgo es lento, es decir actúa después de un período T que es mucho menor a la tasa a la que se ejecuta un paso del filtro (i.e.: la tasa de las correcciones).

El sesgo además de ser lento, demuestra un comportamiento constante a lo largo del tiempo. Entonces se podría decir que su derivada respecto del tiempo es cero tal como lo indica la función f del modelo propuesto.

Esta suposición tiene una varianza determinada que se define en el elemento q_{22} de la matriz Q . Esto significa que se aproxima una constante mediante un modelo de tasa de cambio nula, con una varianza dada. El modelo dice además que el valor *puede que no sea constante* ($q_{22} \neq 0$) pero estará en un entorno muy cercano.

De acuerdo a este modelo, si se requiere seguir algo con una tasa de variación rápida, por ejemplo una señal de alta frecuencia, el filtro responderá lento: el filtro seguiría tarde a la señal. El modelo es una semejanza a lo que en filtros clásicos sería la respuesta de un pasa bajos a una señal de alta frecuencia.

Si ahora al modelo de derivada, nula con varianza q_{22} , se lo hace seguir a las correcciones que se le hacen a las estimaciones y mediciones de ángulo, se seguirá muy lentamente esta variación, de hecho, se estaría siguiendo el comportamiento de la corrección a largo plazo, que resulta siendo el sesgo del girómetro.

5 SISTEMA DE EVALUACIÓN DE LOS FILTROS: PÉNDULO MECÁNICO

Ya completada la etapa de desarrollo teórico de los filtros que se aplicaran a las señales de los sensores inerciales, fue necesario idear un método para evaluar el desempeño de los filtros bajo condiciones reales de funcionamiento de los sensores, a fin de establecer sus limitaciones y obtener parámetros que permitan optimizar su rendimiento.

Para ello, es necesario contar con una referencia real de posición angular que se pueda comparar con la salida de los filtros. La solución por la que se adoptó fue la construcción de un péndulo mecánico sobre el cual se montaron adecuadamente los sensores inerciales, para sensar así la posición angular del péndulo en movimiento. La señal de referencia fue provista por un potenciómetro de precisión y bajo rozamiento montado sobre el eje de rotación del péndulo.

De esta forma se obtuvo una señal de referencia por parte del potenciómetro, traducida a unidades de posición angular, y tres señales provenientes de la IMU Combo V1, correspondientes velocidad angular sensada por el girómetro, y aceleraciones sobre los 2 ejes de medición del acelerómetro.

Estas señales fueron digitalizadas mediante una placa de adquisición de datos de National Instruments (NI PCI – 6023-E), y almacenadas con un formato compatible con el software LabVIEW, de tal manera que luego se procesaron las señales con un programa realizado en LabVIEW en el que se implementaron los filtros diseñados para procesar las señales digitalizadas de los sensores y se realizó la representación gráfica de las salidas de los filtros y la señal del potenciómetro, a fin de comparar luego los resultados.

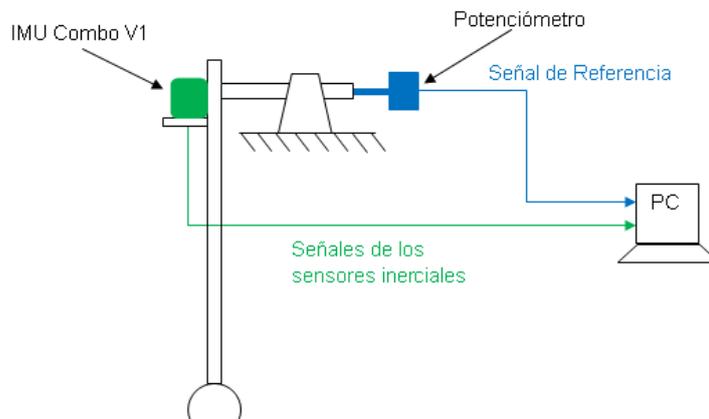


Figura 7: Esquema Del Sistema De Péndulo Mecánico Utilizado

5.1 Filtros complementarios

A continuación se puede observar la comparación entre la señal de referencia y la señal del sistema inercial con filtros complementarios:

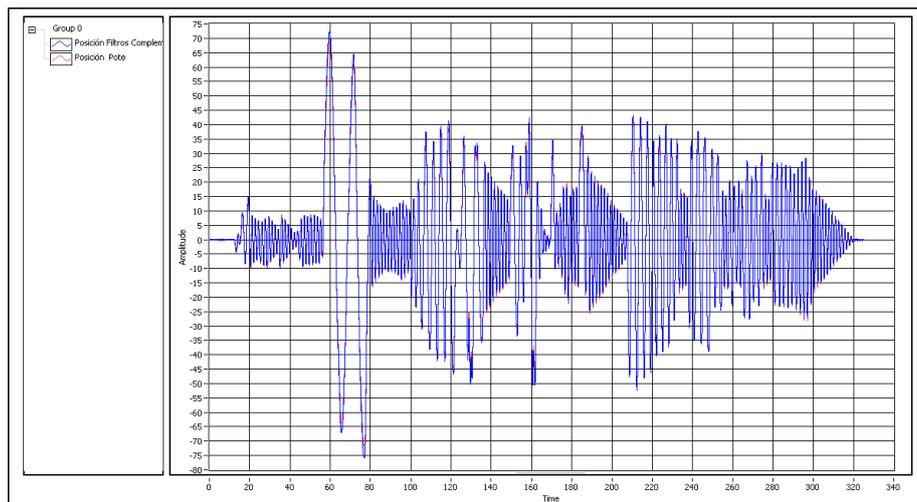


Figura 8: Eliminación Del Drift. Compárese Con La Figura 4

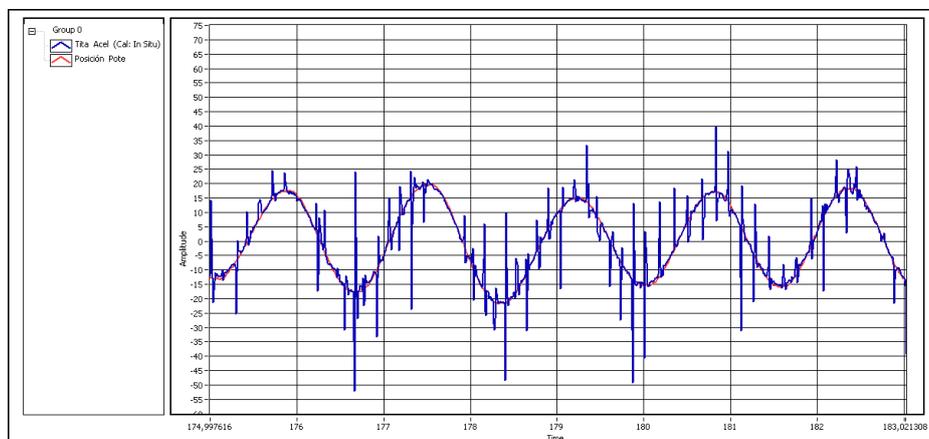


Figura 9: Señal Corrompida Por Vibraciones Sensadas Por El Acelerómetro.

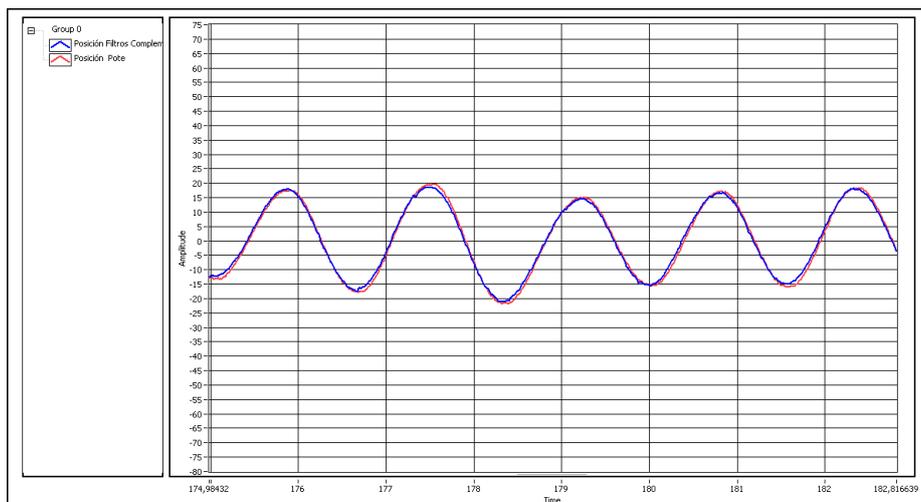


Figura 10: Corrección Del Error Por Vibraciones Mediante Los Filtros Complementarios.

5.2 Filtro extendido de Kalman

La Figura 11 muestra la comparación de la señal de referencia (verde), la señal del sistema inercial corrompida por vibraciones sensadas por el acelerómetro (negro), y la estimación mediante el filtro extendido de Kalman (rojo):

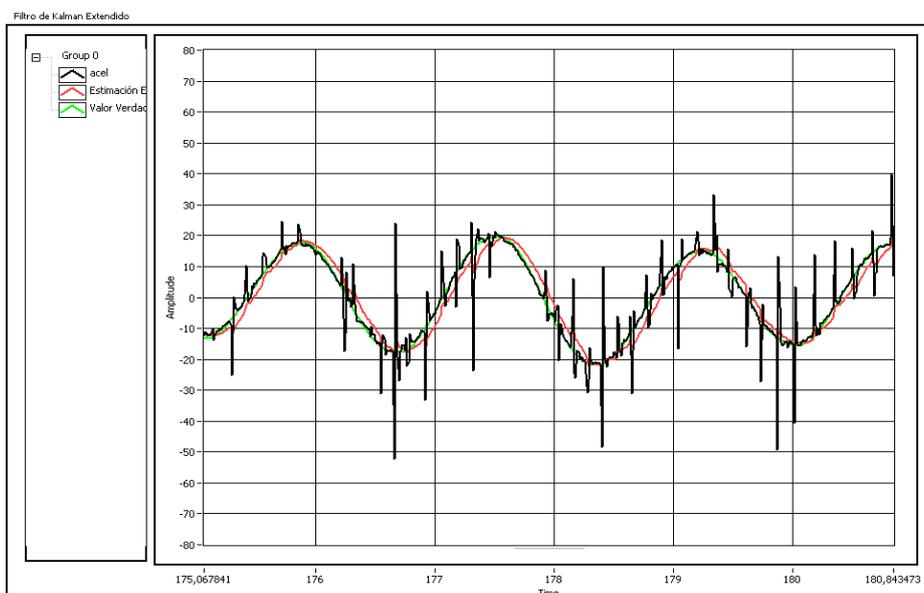


Figura 11: Resultado Del Procesamiento De Las Señales Mediante EKF.

6 IMPLEMENTACIÓN EN HARDWARE

Luego de las simulaciones, el siguiente paso consistió en implementar los filtros diseñados en un microcontrolador para el procesamiento en tiempo real de las señales de los sensores inerciales, obteniendo así un sistema autónomo de cálculo de posición angular que pueda ser montado en un vehículo aéreo.

Para ello, el microcontrolador muestrea las señales analógicas de los sensores inerciales mediante el módulo de conversión AD que posee, realiza los cálculos pertinentes para el procesamiento de las señales digitalizadas y obtiene así la posición angular estimada de la plataforma, para finalmente transmitir estos valores por comunicación RS232.

El microcontrolador seleccionado para la implementación en tiempo real del procesamiento, fue el PIC 18F452, cuyas características más importantes son:

- 8 canales de conversión A/D de 10 bits con un tiempo de conversión de $20\mu\text{s}$ aproximadamente.
- Módulo TMR0 con contador de 8 ó 16 bits.
- Memoria FLASH de 32Kb.
- Módulo de multiplicación por hardware de 8×8 bits
- Soporta hasta 40MHz de frecuencia de clock.
- Módulo USART, que soporta protocolo RS232.

Para la programación, se utilizó el entorno MPLAB IDE en lenguaje C mediante el compilador de HI-TEC. El programador utilizado fue el PICSTAR Plus de Microchip.

Las especificaciones técnicas del hardware desarrollado son:

- Alimentación: 7,5V a 20V según especificaciones del regulador de tensión LM7805.
- Consumo nominal: 15.0 ± 0.5 mA.
- Velocidad máxima de transmisión RS232: 115200 bits/seg.
- Bytes transmitidos: 6 por filtro implementado.
- Frecuencia de muestreo: 100Hz.
- Resolución: $0,1^\circ$.
- Rango de medición: $\pm 90^\circ$.
- Tiempo de procesamiento (incluida transmisión RS232):
 - Filtros Complementarios: 1,5ms.
 - Filtro de Kalman: 3ms.
 - Filtro Extendido de Kalman: 2,5ms.
 - Tres filtros: 10ms.
- Dimensiones: 60 x 80 x 35 mm.
- Peso: 50 grs.

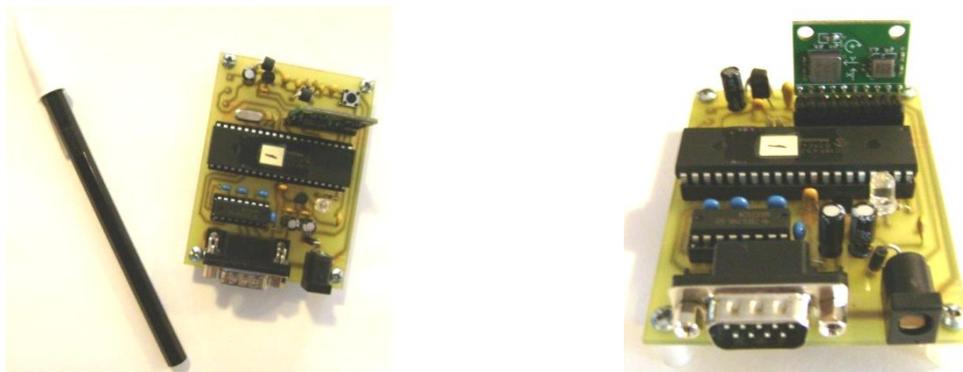


Figura 12: Hardware Desarrollado.

7 EVALUACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE LOS FILTROS

Una vez desarrollado el hardware, se evaluó su comportamiento condiciones reales, para lo cual se consideraron dos condiciones: *movimiento de un grado de libertad (rotación sobre un eje)* y *movimiento de dos o más grados de libertad (rotación con movimiento de traslación en el espacio tridimensional)*.

El primer caso representa la condición para la cual fue diseñado el sistema, mientras que la segunda condición sirve para demostrar las limitaciones del sistema frente a un movimiento que contenga más grados de libertad.

Para la evaluación en el primer caso se montó el hardware desarrollado en el péndulo y el mismo PIC transmitió los valores estimados de posición y el valor de referencia del potenciómetro.

Para la evaluación en el segundo caso se utilizó como referencia una IMU comercial de tres grados de libertad: el modelo *MTi-28 A53 G35 de XSENS*.

7.1 Evaluación en el péndulo

A continuación se muestra el comportamiento de los filtros (EKF en rojo, CF en negro) frente a la señal de referencia:

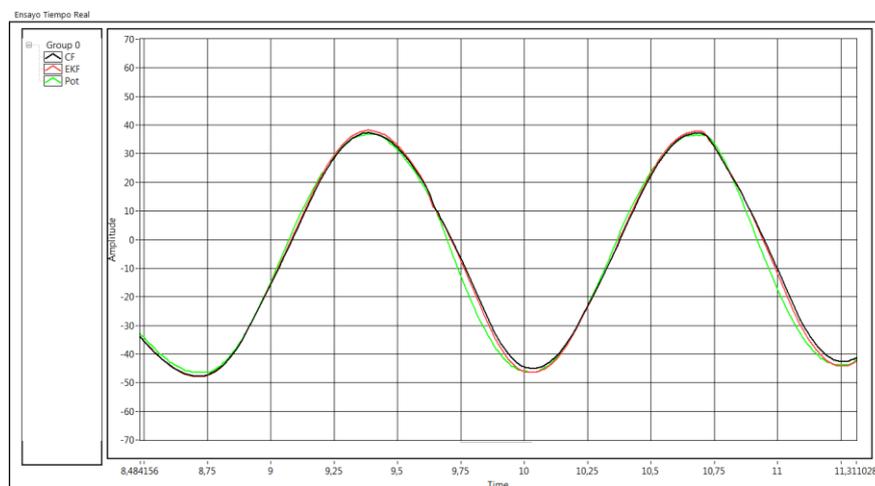


Figura 13: CF Vs. EKF Frente A La Referencia Del Potenciómetro.

7.2 Evaluación con la MTi-28 A53 G35

La MTi-28 A53 G35 es una IMU de tres grado de libertad que posee acelerómetro, girómetro y magnetómetro de tres ejes, de tal manera de entregar actitud, velocidad angular y orientación magnética en el espacio tridimensional. Para el procesamiento utiliza un DSP con una frecuencia máxima de procesamiento de 120Hz. La resolución angular es de $0,05^\circ$ con un rango de $\pm 180^\circ$ en rolido y guiñada, y $\pm 90^\circ$ en cabeceo.

La comunicación de los datos a la PC es por medio de transmisión RS232 y posee un software propio para la adquisición y almacenamiento de los datos.



Figura 14: MTi-28 A53 G35 de XSENS

Para el ensayo se colocó ambas IMUs sobre una plataforma de tal manera de alinear los ejes de sentido de interés (rolido).

La MTi se configuró para una frecuencia de muestreo de 100Hz (al igual que la IMU de desarrollo propio) y los datos almacenados se graficaron en Excel.

En primera instancia se realizaron ensayos con movimientos de rotación minimizando los movimientos de traslación. En la Figura 15 se muestra los resultados, en donde se puede apreciar la precisión de la IMU desarrollada frente a la MTi.

El ensayo con movimientos de traslación sobre el eje horizontal se muestra en la Figura 16, en donde se puede apreciar la gran sensibilidad del sistema frente a la MTi, como se había previsto.

La Figura 17 muestra un ensayo con movimientos de traslación en el espacio tridimensional. Como se puede observar, la IMU desarrollada posee un gran error en la posición angular estimada al no integrar mediciones en todos los ejes, tal como se había previsto.

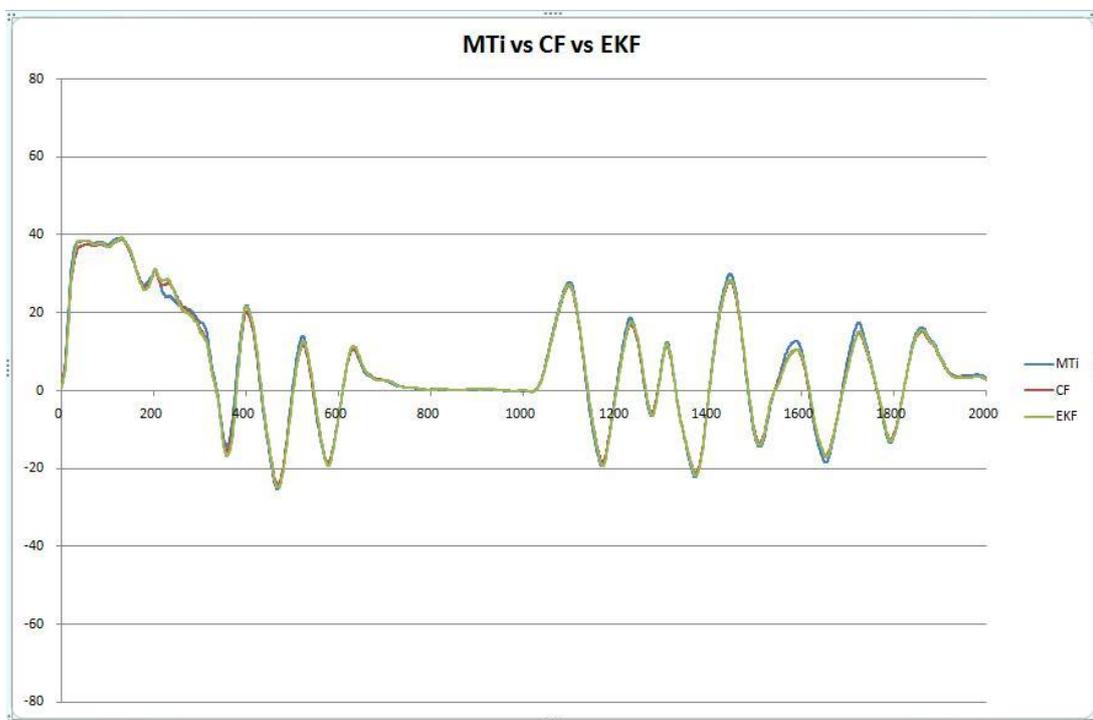


Figura 15: Movimiento Rotacionales Sin Traslación.

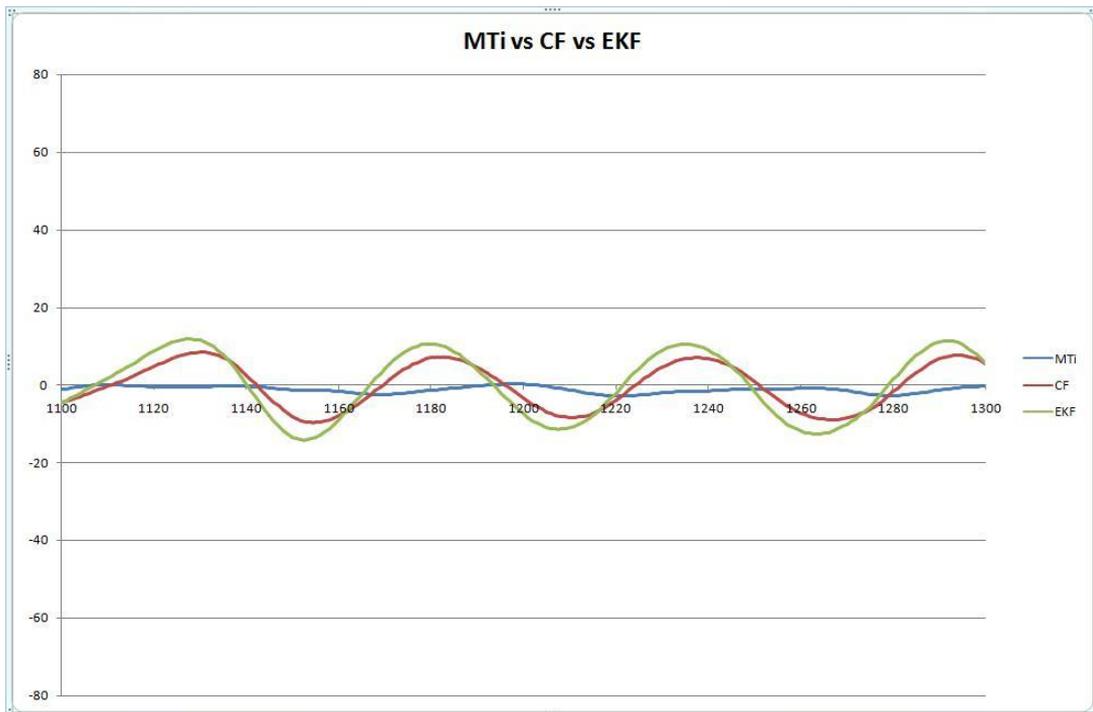


Figura 16: Error Por Movimientos De Traslación Sobre Eje Horizontal

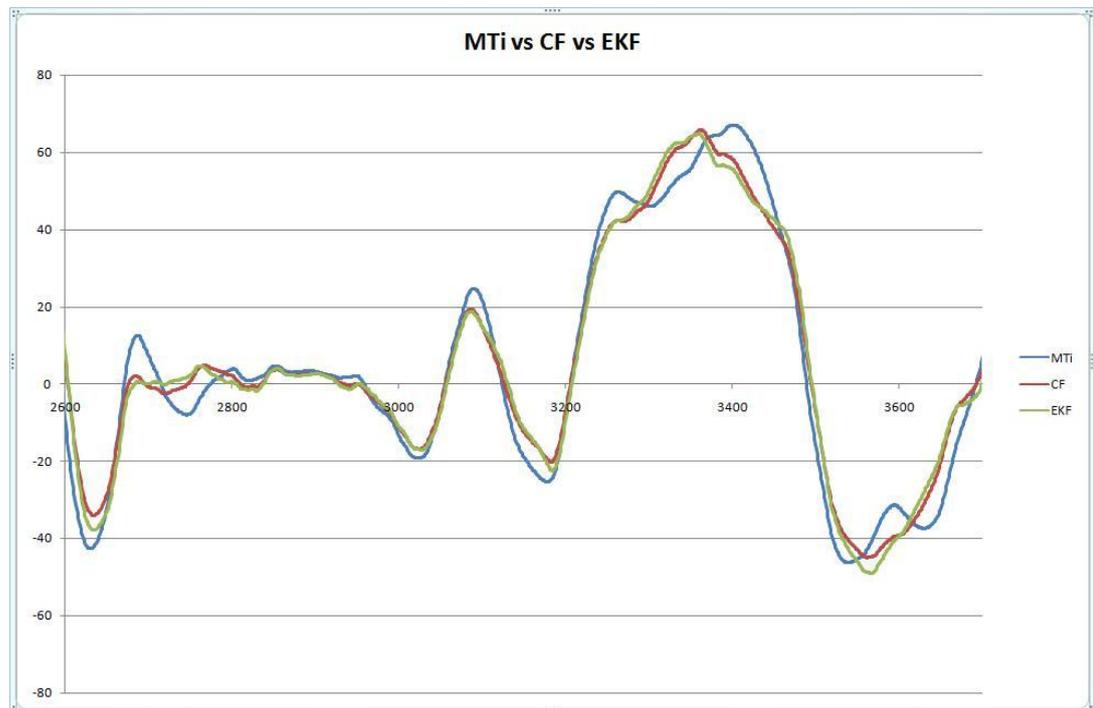


Figura 17: Error De Estimación Con Movimiento De Traslación En Todos Los Ejes

8 CONCLUSIONES

Se logró obtener una Unidad de Mediciones Inerciales (IMU) de un grado de libertad (1DOF) que utiliza un microcontrolador Microchip PIC 18F452 y sensores de Analog Devices (ADXL203 y ADXRS401). Las estimaciones son transmitidas por comunicación serial RS232 a una velocidad máxima de 115200 bits/seg, con un protocolo totalmente

configurable. Sus dimensiones son 60 x 80 x 35 mm, y su peso es de 50 grs. Posee una resolución de $0,1^\circ$ en un rango de $\pm 90^\circ$.

Con respecto al funcionamiento de los sensores, es importante destacar que una variación de la temperatura de trabajo repercute en una variación del voltaje de referencia ($0g$ y $0^\circ/s$). Esto implica un error importante en la estimación, que ninguno de los métodos de procesamiento presentados es capaz de corregir. Esta situación no es demasiado crítica en el caso del acelerómetro ya que al utilizar un cociente entre las mediciones de los ejes para calcular el ángulo estimado, una variación del voltaje de referencia se anula o minimiza considerablemente. No ocurre lo mismo con el girómetro, ya que éste es muy sensible a los cambios de temperatura y un cambio en el voltaje de referencia del mismo incrementa considerablemente el *drift*.

La alineación correcta de los sensores con el eje de rotación es también un parámetro importante ya que se comprobó que una desalineación induce error en la estimación de posición angular de los sensores, independientemente del filtro utilizado.

Con respecto a los Filtros Complementarios, si se considera que el ruido sentido por el acelerómetro es de amplio espectro, y que el ruido del girómetro es de espectro angosto, se demuestra la facilidad de eliminar el *drift* producido por el girómetro con el filtro pasaalto, no ocurriendo lo mismo con el ruido del acelerómetro, al cual se le pueden anular las componentes de mayor frecuencia pero nunca eliminarlo por completo. Por lo tanto lo más conveniente es determinar el valor de frecuencia de la componente de *drift* para disminuir la frecuencia de corte de los filtros al punto de eliminarlo por completo. De este modo se atenúa la mayor porción del espectro de ruido del acelerómetro y se aprovecha mejor al girómetro para la respuesta del sistema al movimiento, reservando al acelerómetro para las situaciones estáticas o muy cercanas a ella. El inconveniente de disminuir esta frecuencia de corte es que el sistema no responde tan instantáneamente para movimientos de muy baja velocidad, por lo que existe una relación de compromiso entre velocidad de respuesta en movimientos pequeños y sensibilidad al ruido del acelerómetro. Por lo tanto es evidente que la frecuencia de corte debe determinarse de acuerdo a las condiciones de funcionamiento del sistema en una aplicación determinada, es decir, niveles de ruido esperado (vibraciones), velocidad y amplitud de los movimiento que se deseen sensar.

Con una frecuencia de corte de $0,5$ Hz se obtuvo una respuesta satisfactoria para todas las condiciones consideradas en este trabajo.

El modelo matemático del Filtro Extendido de Kalman, que basa su modelo en una linealización en torno a pequeñas perturbaciones de la trayectoria, resulta en un estimador de mayor robustez. Además se agrega que por la libertad en la definición de la función de transición f del modelo no lineal, es posible reemplazar esta función por una lectura directa del estado a estimar, reduciendo de éste modo el costo de los cálculos logrando un proceso con $1,7ms$ de duración. Es importante conocer el entorno en el que estarán inmersos los sensores para así realizar una correcta determinación en las covarianzas del ruido de las mediciones y del proceso; obteniendo así una relación de compromiso entre la sensibilidad del sistema a los ruidos inducidos en el acelerómetro y la velocidad de respuesta del filtro, al igual que ocurre con los Filtros Complementarios.

Se mencionarán las características de los Filtros Complementarios y Filtro Extendido de Kalman, a fin de realizar una comparación entre los mismos:

- Filtros Complementarios:
 - a. Permite la estimación de una única variable.

- b. Fusiona dos mediciones de una misma variable (*acelerómetro* $\xrightarrow{\arctg} \theta$ y *girómetro* $\xrightarrow{\int dt} \theta$)
 - c. Su mecánica de funcionamiento considera las características en frecuencia del ruido de cada sensor, debiendo ser éstas de naturaleza complementaria.
 - d. Modelo sencillo que permite una fácil aplicación.
 - e. Menor consumo de recursos para su implementación embebida.
- Filtro Extendido de Kalman:
 - a. Permite la estimación de múltiples variables de un mismo estado.
 - b. Fusiona mediciones de un estado (conjunto de variables medidas).
 - c. Su mecánica de funcionamiento utiliza un modelo matemático que considera características más amplias que sólo la respuesta en frecuencia del ruido de los sensores.
 - d. Permite la flexibilidad de considerar diferentes modelos matemáticos que describan mejor la dinámica del sistema para luego seleccionar el que mejor se adapte a los requerimientos de la aplicación.
 - e. Por lo expuesto en el punto anterior, su comprensión reviste mayor complejidad y su aplicación no es tan sencilla.
 - f. Mientras más complejo es el modelo matemático empleado, es mayor la cantidad de recursos consumidos para su implementación embebida.

En el trabajo desarrollado, se observó que con Filtros Complementarios se obtuvo un rendimiento muy similar al alcanzado con EKF, con menor consumo de memoria y tiempo de procesamiento. Pero el rendimiento alcanzado por los Filtros Complementarios es el mejor que se puede obtener, mientras que con EKF se puede mejorar aún más sus prestaciones considerando un modelo matemático diferente en donde se procesen un mayor número de variables medidas.

Para finalizar con las conclusiones, se mencionarán aspectos a mejorar como una extensión del trabajo desarrollado:

- a. Aprovechar la salida de temperatura sensada que la IMU Combo V1 posee para desarrollar un método de compensación en temperatura por software embebido.
- b. Extender los grados de libertad de la IMU aprovechando los recursos ociosos del microcontrolador empleado, analizando la implementación de otros modelos matemáticos para el filtro Extendido de Kalman.
- c. Analizar otro tipo de hardware (DSP, FPGA) para lograr una IMU de mejores prestaciones en velocidad de procesamiento, o para el caso en el que los recursos del microcontrolador sean insuficientes para extender los grados de libertad del sistema.

REFERENCIAS

- Greg Welch y Gary Bishop, *An Introduction to the Kalman Filter*, Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill, 2006.
- K. V. Ramachandra, *Kalman Filtering Techniques for Radar Tracking*, Marcel Dekker, 2000.
- Mohinder S. Grewal y Angus P. Andrews, *Kalman filtering: Theory and Practice Using MATLAB*, Wiley-Interscience, 2001.
- Peter S. Maybeck, *Stochastic models, Estimation and Control*, Academic Press, 1979.
- Shmuel Merhav, *Aerospace Sensor Systems and Applications*, Springer 1996.