

# AERODINÁMICA ASOCIADA AL FLUJO INESTACIONARIO GENERADO POR EL BATIMIENTO DE ALAS EN “HOVER”

**Bruno Roccia<sup>a,b,c</sup>, Sergio Preidikman<sup>a,b,c</sup> y Julio Massa<sup>a,b</sup>**

<sup>a</sup> *Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Río Cuarto, Ruta Nacional 36 Km. 601, 5800 Río Cuarto, Argentina, broccia@ing.unrc.edu.ar, <http://www.ing.unrc.edu.ar>*

<sup>b</sup> *Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina, jmassa@efn.uncor.edu, <http://www.efn.uncor.edu>*

<sup>c</sup> *CONICET - Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Av. Rivadavia 1917, Buenos Aires, Argentina, spreidik@umd.edu, <http://www.conicet.gov.ar>*

**Palabras clave:** Aerodinámica, Drosophila Melanogaster, Borde de ataque, Hover, Estelas.

**Resumen.** En este trabajo se presenta el desarrollo de una herramienta de simulación numérica que permite estudiar la aerodinámica no-lineal e inestacionaria asociada al complejo movimiento de batimiento de las alas de insectos y de algunas aves pequeñas.

El modelo aerodinámico adoptado en este esfuerzo es una modificación de la versión 3D del “unsteady vortex lattice”, una generalización del conocido “vortex lattice method”, ampliamente utilizado en flujos incompresibles y estacionarios. El modelo permite tener en cuenta el comportamiento no-estacionario, las no-linealidades aerodinámicas asociadas con grandes ángulos de ataque y grandes desplazamientos producto del movimiento del eje longitudinal de cada ala, las deformaciones estáticas, y flujos dominados por vorticalidad.

En este trabajo se estudia, para una configuración de ‘vuelo suspendido’ (hover), la influencia del desprendimiento de vorticalidad desde el borde de ataque de las alas batientes en el cómputo de la fuerza de sustentación. Este fenómeno ha sido bien documentado por biólogos y zoólogos, y se especula, explica el notable incremento de las cargas aerodinámicas producto del batimiento de las alas. El movimiento de las mismas se describe utilizando un modelo cinemático desarrollado con anterioridad por los autores de este trabajo.

La combinación del modelo cinemático con el modelo aerodinámico, junto con un preprocesador para generar la geometría del insecto, forman una herramienta computacional que permite: utilizar diferentes cinemáticas para el movimiento de las alas, definir distintas geometrías para el insecto, predecir el campo de movimiento del fluido alrededor de la estructura del cuerpo y de las alas batientes, estimar la distribución espacio-temporal de la vorticalidad adherida al cuerpo/ alas del insecto, estimar la distribución de vorticalidad y forma de las estelas emitidas desde los bordes filosos de las alas, predecir las cargas aerodinámicas actuantes sobre éstas, y tener en cuenta todas las posibles interferencias aerodinámicas.

## 1 INTRODUCCIÓN

A través de millones de años de evolución la naturaleza ha logrado optimizar sus recursos con el fin de maximizar el desempeño de las estructuras biológicas existentes sobre el planeta tierra (Gordon, 1976). Este hecho motivó la búsqueda de conceptos de diseño basados en criaturas vivientes desde tiempos inmemoriales (Leonardo da Vinci y su diseño de una máquina voladora a partir de numerosos estudios realizados sobre la anatomía de aves). En los últimos años se han producido grandes avances en diferentes áreas de la ciencia relacionadas con el diseño de dispositivos artificiales a partir del estudio y observación de organismos, sistemas y procesos existentes en la naturaleza.

En muchos casos se ha tratado de realizar una imitación biológica completa de un insecto, ave, o pez, obteniéndose resultados poco alentadores. A esta altura es crucial hacer una distinción entre lo que se entiende por imitación biológica (biomimética) e inspiración en la biología. La biomimética o copia de un organismo vivo es imposible de llevar a cabo con la tecnología que existe actualmente, por otro lado, la inspiración en la biología, es un buen punto de partida para dar un primer paso hacia el diseño y posterior construcción de robots que tengan un desempeño igual o superior a las entidades biológicas existentes en la naturaleza (Michelson y Naqvi, 2003).

Actualmente, la comunidad científica se ha concentrado específicamente en el desarrollo de micro vehículos aéreos (MAVs) inspirándose para ello en el vuelo de insectos, tales como moscas, libélulas y abejas, y también en pequeñas aves que muestran una increíble habilidad para ejecutar maniobras extremadamente complejas como el colibrí. Este renovado interés por esta clase especial de vehículos está impulsado por las potenciales aplicaciones que podrían abordarse, tales como: intervención en misiones de rescate y vigilancia (Mueller y Delaurier, 2001), exploración de ambientes hostiles (incluyendo en el futuro atmósferas no terráqueas e inspección de edificios colapsados, entre otras. En la Figura 1 se pueden observar los prototipos de micro vehículos aéreos más importantes construidos desde el año 2000 hasta la fecha.

El *Microbat* fue diseñado en forma conjunta por Aerovironment y Caltech siendo el primer micro vehículo aéreo construido con fondos destinados a impulsar el desarrollo de esta nueva tecnología (<http://www.reallycooltoys.com/news/news2.html>). En el año 2002 en la Universidad de Toronto (Canadá) se construyó el *Mentor*, primer MAV equipado con un sistema de radio control y capaz de realizar 'hover' (vuelo suspendido), a partir de ese momento la capacidad de ejecutar maniobras de este tipo fue incluido como un parámetro de diseño fundamental en el desarrollo de las nuevas generaciones de MAVs.

En el año 2005, dos universidades holandesas, la Universidad Técnica de Delf en conjunto con la Universidad de Wageningen, construyeron un MAV con la capacidad de cambiar entre dos configuraciones de vuelo distintas, 'forward flight' (vuelo hacia adelante) y hover. Este vehículo fue bautizado con el nombre de *Delfly I* y está equipado con una cámara de video que permite obtener, en combinación con una baja velocidad de vuelo, una visión general de su entorno.

El *Delfly II*, evolución del *Delfly I*, tiene solamente un peso de 16 gr. y una envergadura de 28 cm, casi un 50 % más pequeño que el *Delfly I*. Las principales características que lo destacan respecto a su antecesor son: *i*) mayor autonomía mediante una nueva batería de litio (15 minutos en forward flight u 8 minutos en hover); y *ii*) capacidad de utilizar la cámara de video como un lazo de control permitiendo que dicho vehículo pueda ser piloteado exitosamente por un aficionado.

Posteriormente, en el año 2007, Petter Muren construyó un pequeño MAV con una Envergadura de 10 cm, un peso de 1,1 gr. y una capacidad de vuelo menor a un minuto. ([http://www.proxdynamics.com/r\\_d/micro\\_helicopters\\_and\\_ornithopters](http://www.proxdynamics.com/r_d/micro_helicopters_and_ornithopters)). Durante el *3rd US-European Competition and Workshop on Micro Air Vehicles* MAV07 llevada a cabo en Toulouse, Francia, Muren ganó un premio especial por construir el micro vehículo aéreo a radio control más pequeño del mundo.

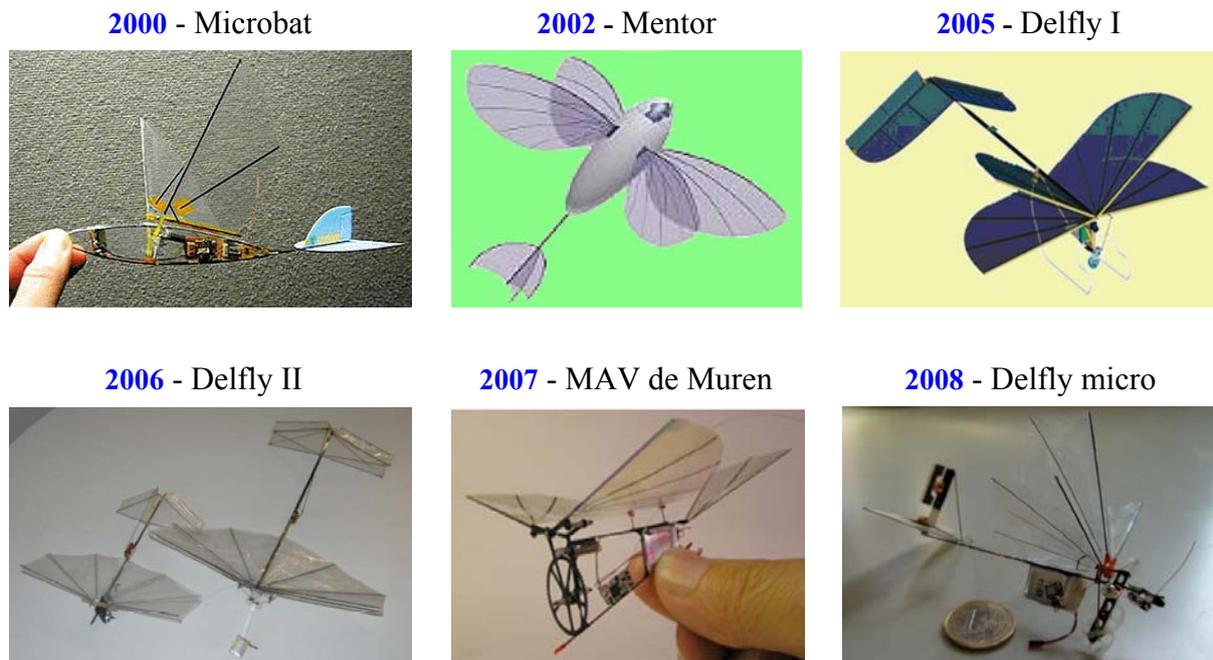


Figura 1: Historia del progreso en el diseño de MAVs durante la última década.

Por último, la nueva generación del *Delfly*, el *Delfly micro*, tiene una envergadura de 10 cm, un peso de 3,07 gr. y una autonomía cercana a los 3 minutos. Hasta la fecha el *delfly micro* es el vehículo volador equipado con una cámara de video más pequeño construido en el mundo (<http://www.delfly.nl>).

A pesar de los grandes logros obtenidos en la última década respecto al diseño de MAVs, los entes biológicos concebidos por la naturaleza aventajan a sus análogos mecánicos en muchos aspectos, algunos fueron puestos en evidencia en esta sección introductoria, tales como el problema del tamaño y de la autonomía del vehículo. Estas son variables interrelacionadas y por lo tanto es extremadamente complejo, sino casi imposible, maximizar o minimizar dichas cantidades en forma independiente, al menos con la tecnología que existe actualmente.

Otro aspecto importante en la carrera por diseñar y construir un MAV funcional es entender definitivamente como los insectos y aves pequeñas batan sus alas para obtener la fuerza de sustentación suficiente para mantenerse en vuelo y el empuje necesario para desplazarse a través del aire.

En este trabajo se presenta la implementación numérica de un modelo aerodinámico basado en el método de red de vórtices no-estacionario y no-lineal (UVLM). El método numérico fue modificado con el objeto de incluir el desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque de las alas batientes y admitir diferentes patrones que describen su movimiento durante un ciclo completo de batimiento.

En este esfuerzo se utilizó la cinemática desarrollada por Dickinson para mover un robot a escala de una mosca doméstica (Robofly). Dickinson ha utilizado este robot en numerosas oportunidades para obtener mediciones experimentales tanto de las fuerzas de sustentación como de las fuerzas de empuje correspondientes a diferentes configuraciones de vuelo (Dickinson y otros, 1999). Estas mediciones experimentales establecen un estándar y se utilizan habitualmente para validar resultados provenientes de simulaciones numéricas (Sane y Dickinson, 2001; Ansari y otros, 2006).

## 2 MECANISMOS DE VUELO

El ciclo de batimiento de un insecto puede ser dividido en cuatro fases bien marcadas (Dickinson y otros, 1999; Singh y otros, 2004): *i*) una primera etapa de traslación donde el ala realiza un movimiento descendente desde la parte dorsal hacia el vientre del insecto, llamada *downstroke*; *ii*) hacia el final del *downstroke* el ala gira rápidamente alrededor de su eje longitudinal e invierte su dirección de movimiento, esta fase se llama *supination*; *iii*) una segunda etapa de traslación donde el ala realiza un movimiento ascendente desde el vientre hacia la parte dorsal del insecto, llamada *upstroke*; y *iv*) hacia el final del *upstroke* el ala vuelve a girar alrededor de su eje longitudinal e invierte nuevamente la dirección de su movimiento, esta fase se llama *pronation*. Las fases *ii*) y *iv*) pueden ser clasificadas como la porción rotacional del ciclo de batimiento (*reversal stroke*). Al terminar la última fase rotacional (*pronation*) el ciclo de batimiento comienza nuevamente. Cada medio ciclo de batimiento (*downstroke/upstroke*) se denomina *half-stroke*.

Cuando el flujo de aire alrededor de las alas de insectos es estudiado experimentalmente en un túnel de viento en el rango de velocidades correspondientes al vuelo natural de estas criaturas, las fuerzas medidas en los experimentos son sustancialmente más grandes que aquellas predichas por las teorías aerodinámicas convencionales. Esta deficiencia, en las predicciones de la aerodinámica clásica respecto de los valores experimentales, incentivó la búsqueda de mecanismos aerodinámicos no-convencionales que puedan explicar el incremento en la producción de sustentación y empuje presentes en vuelos con alas batientes.

Recientes estudios sobre insectos reales y modelos dinámicamente escalados de insectos han revelado la existencia de tres mecanismos aerodinámicos de generación de sustentación y empuje asociados al batimiento de las alas: *i*) el retraso de la pérdida dinámica (*delayed stall*); *ii*) la sustentación rotacional (*rotational lift*); y *iii*) la captura de la estela (*wake capture*).

### 2.1 Retraso de la pérdida dinámica

En un aeroplano, si el ángulo de ataque que forma el ala con la dirección de flujo incidente es pequeño, el aire se divide en el borde de ataque y fluye suavemente a través de la cara superior e inferior del ala. La velocidad de la corriente de flujo sobre la cara superior se ve incrementada, y se produce una disminución de la presión estática. En cambio sobre la cara inferior, la velocidad de la corriente de flujo disminuye y se produce un aumento de presión estática.

La diferencia de presiones estáticas entre las caras, integrada sobre la superficie de la planta alar da como resultado una fuerza neta de sustentación, (ver Figura 2a). Por el contrario, si este ángulo de ataque es muy grande la corriente de flujo sobre la cara superior no puede seguir el contorno del ala. Esto se debe a la existencia de gradientes de presión adversos lo suficientemente grandes como para que se produzca recirculación del flujo en el extradós y se produce la separación dando lugar a una pérdida catastrófica de sustentación.

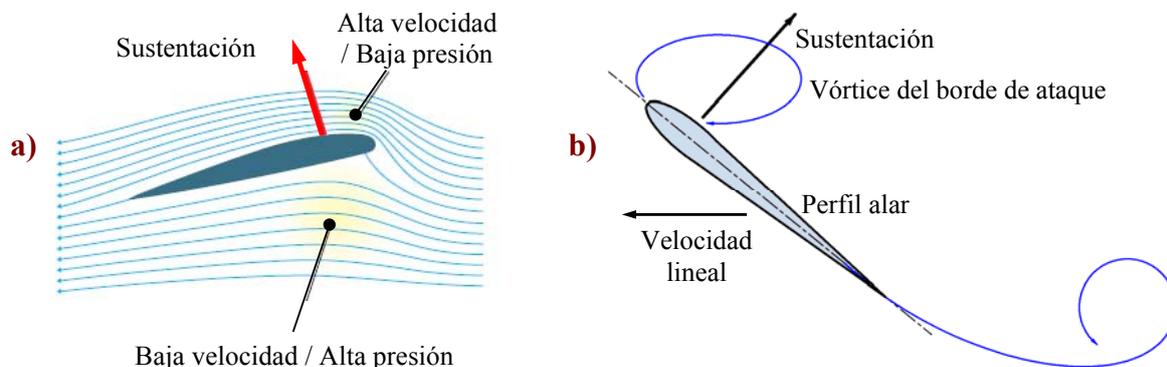


Figura 2: Mecanismos aerodinámicos;

a) Visualización de flujo de aire alrededor de un perfil alar; b) Formación del vórtice del borde de ataque.

En este punto nos podríamos preguntar: ¿Cómo esta pérdida puede ayudar a los insectos a obtener un aumento en las fuerzas de sustentación? La respuesta está relacionada con la velocidad con que estas criaturas baten sus alas. En el estado inicial el aumento de sustentación se debe a la presencia de un vórtice (ver Figura 2b) sobre el borde de ataque (leading edge vortex, LEV). La velocidad del flujo de aire en dicho vórtice es bastante alta, lo cual implica una baja presión sobre la cara superior del ala y por lo tanto un aumento de sustentación (ver Figura 3) (Sane, 2003; Singh y Chopra, 2006). Este efecto fue descubierto en Inglaterra por ingenieros aeronáuticos alrededor de 1930, pero es muy breve para ser aprovechado por los aviones convencionales.

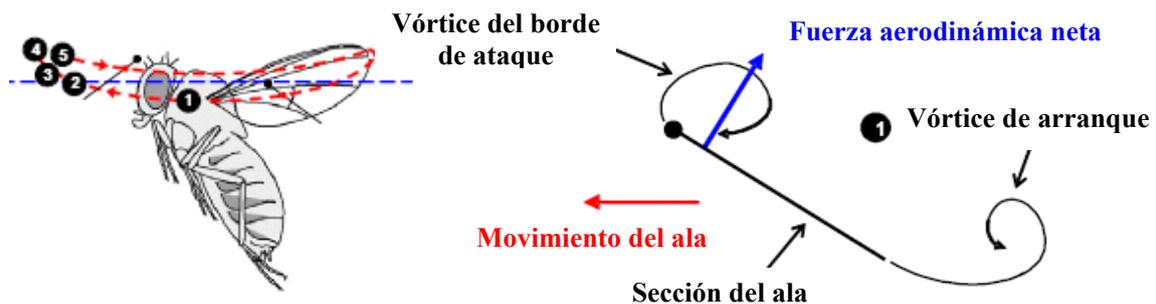


Figura 3: Esquema del mecanismo de “retraso de la pérdida dinámica”; (Singh and Chopra, 2006).

Ellington sugirió que la estabilidad del vórtice del borde de ataque es atribuible a la presencia de un flujo axial de aire que se desplaza desde la base hacia la puntera del ala reduciendo la intensidad del vórtice pero aumentando su estabilidad, permitiendo de esta forma que permanezca sobre el ala durante gran parte del ciclo de batimiento. Tal flujo axial es importante en grandes insectos, como por ejemplo en polillas y libélulas. Aunque el retraso de la pérdida dinámica explica en gran medida la sustentación producida durante el vuelo de estas criaturas, hay evidencias que sugieren la presencia de otros mecanismos aerodinámicos.

## 2.2 Sustentación rotacional

La sustentación rotacional surge como una combinación del movimiento de traslación y rotación del ala. Este mecanismo es similar al efecto Magnus, el cual permite que una pelota lanzada al aire con cierta rotación (espín) siga una trayectoria curva, como por ejemplo en el tenis o el béisbol. Mientras la pelota rota y se desplaza en el aire, la circulación incrementa la velocidad del flujo de aire sobre una cara de la pelota y la disminuye sobre la cara opuesta. Si la velocidad es más alta sobre la cara superior (backspin), la pelota es impulsada hacia arriba. Por el contrario, si la velocidad es más alta en la cara inferior (topspin), la pelota es impulsada hacia abajo (ver Figura 4) (Dickinson y otros, 1999).

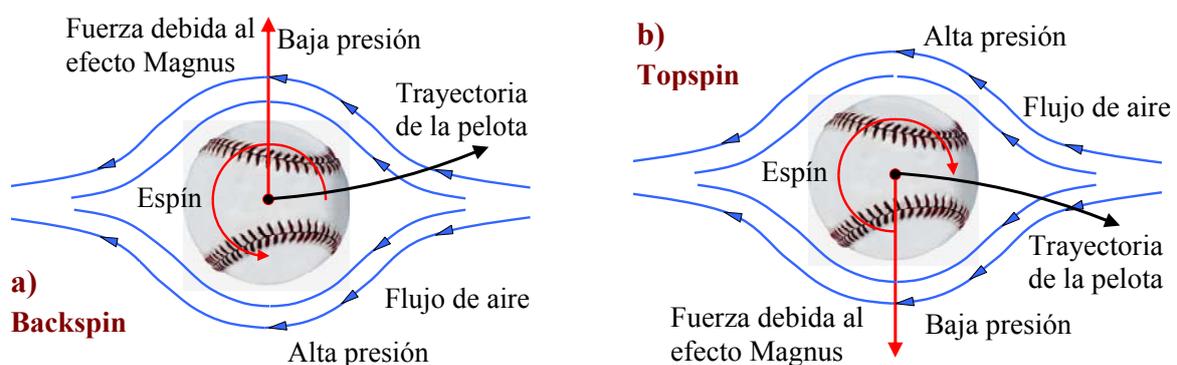


Figura 4: Efecto Magnus; a) Backspin; b) Topspin.

Por lo tanto, en aves e insectos, la dirección de las fuerzas de sustentación generadas por un mecanismo similar al efecto Magnus depende críticamente de la dirección de rotación del ala.

Antes de comenzar cada fase traslacional (downstroke/upstroke) el ala debe adoptar un óptimo ángulo de ataque. Previo al cambio en la dirección de movimiento de traslación del ala, desde un movimiento descendente (downstroke) a un movimiento ascendente (upstroke), o viceversa, el ala rota ocasionando que el borde de ataque gire hacia atrás relativo a la dirección de traslación (backspin), produciéndose de esta manera una fuerza neta de sustentación. Por el contrario, si el ala rota posterior al cambio en la dirección de su movimiento, entonces el borde de ataque gira hacia delante relativo a la dirección de traslación (topspin), originando una fuerza hacia abajo (ver Figura 5) (Sane, 2003; Tarvirdizadeh, 2006).

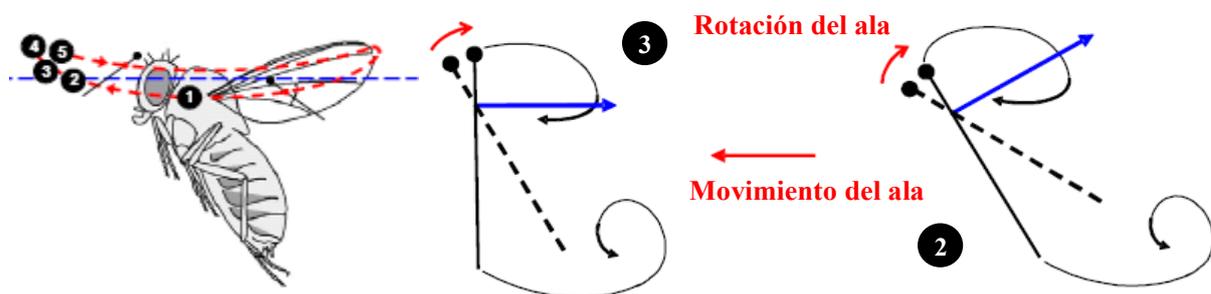


Figura 5: Esquema del mecanismo de “sustentación rotacional”; (Singh y Chopra, 2006).

### 2.3 Captura de la estela

Este mecanismo aprovecha el desprendimiento de vórtices emitidos en ciclos previos. Se ha demostrado sobre modelos 2D, que el flujo de aire generado durante el batimiento de las alas incrementa la velocidad efectiva del fluido al comienzo del ciclo de batimiento siguiente, aumentando de esta manera la producción de fuerzas aerodinámicas que contribuyen a la sustentación.

La magnitud y dirección de las fuerzas aerodinámicas producidas mediante este mecanismo dependen de la relación de fase que existe entre la etapa rotacional y la etapa traslacional. Si la rotación del ala ocurre antes de que el ala invierta su dirección de movimiento, el ala intercepta la estela emitida en ciclos anteriores y genera una fuerza de sustentación positiva. Si dicha rotación es retrasada respecto a la inversión en la dirección de movimiento del ala, el ángulo con el cual el ala intercepta la estela produce sustentación negativa (Dickinson y otros, 1999; Tarvirdizadeh, 2006).

En general, la estela transfiere energía de un objeto moviéndose en un fluido hacia el medio que lo rodea. Los insectos al cambiar rápidamente la dirección de movimiento de sus alas hacia el final de cada fase traslacional recuperan parte de la energía perdida, aumentando de esta forma la eficiencia en la producción de fuerzas de sustentación (ver Figura 6).

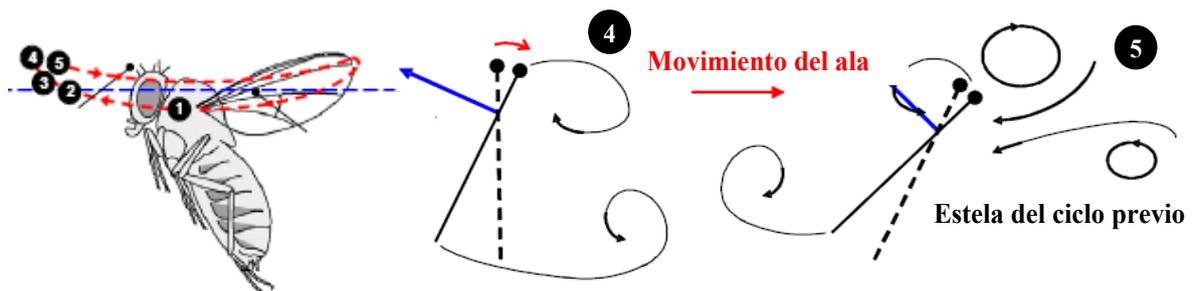


Figura 6: Esquema del mecanismo de “captura de la estela”; (Singh y Chopra, 2006).

### 3 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

Para poder cotejar los resultados de las simulaciones realizadas en este trabajo con mediciones experimentales, se adoptó como caso de estudio, la cinemática y la geometría de las alas del Robofly, desarrollado por Dickinson en la Universidad de Berkeley, USA (Dickinson y otros, 1999; Sane y Dickinson, 2001).

Dickinson llevó a cabo numerosos experimentos sumergiendo dicho robot en un tanque con aceite mineral (densidad  $\rho_{aceite} = 880 \text{ Kg/m}^3$ ). El movimiento y orientación de las alas en cada instante de tiempo fue logrado montando un conjunto de tres servomotores por cada ala, y alimentando los mismos con las señales mostradas en la Sección 3.2. Este robot consta de dos alas rígidas construidas de Plexiglás con un espesor de 3,1 mm, una envergadura de 190 mm, y cuerda máxima de 100 mm (ver Figura 7b).

La viscosidad del fluido, la envergadura del ala, y la frecuencia de batimiento ( $n_f = 0,168 \text{ Hz}$ ) fueron ajustadas con el fin de obtener el número de Reynolds característico del vuelo de insectos tales como la mosca doméstica ( $Re = 136$ ). En la Figura 7a se muestra un esquema del mecanismo.

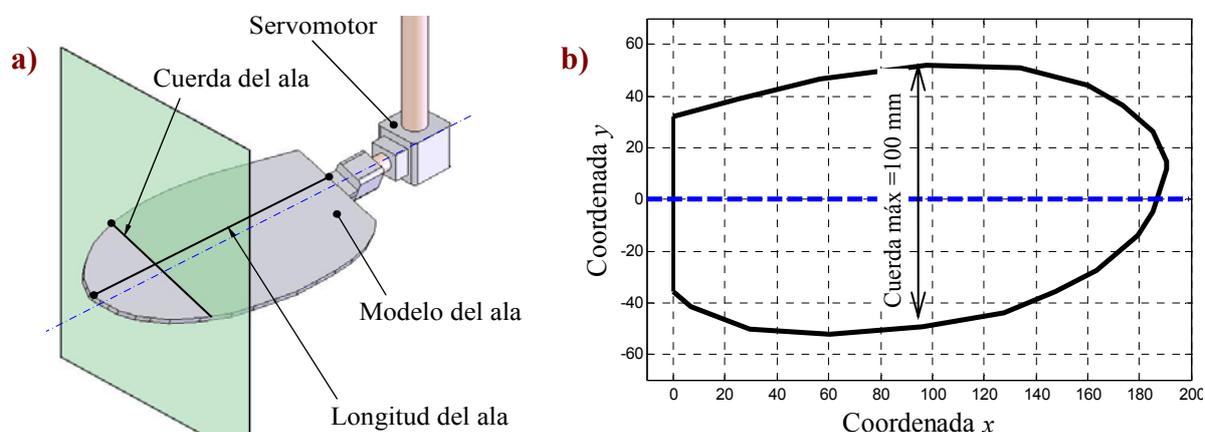


Figura 7: a) Esquema indicando las diferentes partes del Robofly; b) Geometría del ala del Robofly.

#### 3.1 Cinemática del Robofly

Para describir la cinemática del ‘Robofly’, se utilizan dos sistemas de referencia: (i) un sistema de referencia  $\mathbf{N} = \{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$  fijo al plano de aleteo, y (ii) un sistema de referencia  $\mathbf{B} = \{\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3\}$  fijo al ala.

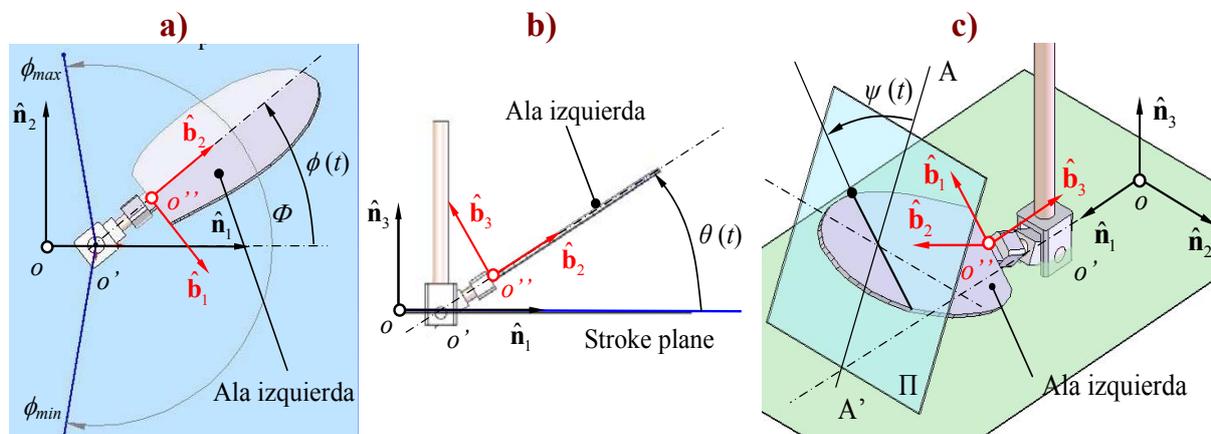


Figura 8: a) Definición del ángulo de posición,  $\phi(t)$ ; b) Definición del ángulo de desviación,  $\theta(t)$ ; c) Definición del ángulo de rotación,  $\psi(t)$ .

La orientación del ala en cada instante de tiempo se puede obtener especificando la evolución temporal de tres ángulos: (i) el ángulo que orienta el ala respecto del plano de batimiento, ‘stroke position’,  $\phi(t)$  (ver Figura 8a); (ii) el ángulo de desviación respecto del plano de batimiento, ‘stroke deviation’,  $\theta(t)$  (ver Figura 8b); y (iii) el ángulo de rotación respecto del eje longitudinal del ala,  $\psi(t)$  (ver Figura 8c).

Para llevar a cabo la transformación del sistema fijo al ala  $\mathbf{B}$ , al sistema inercial  $\mathbf{N}$ , primero se realiza una secuencia de rotaciones (3–2) mediante los ángulos  $\delta$ , y  $\zeta$ , que tienen un valor constante igual a  $90^\circ$ . Luego se utiliza una secuencia de ángulos de Euler (1–3–2) mediante los ángulos  $\phi(t)$ ,  $\theta(t)$ , y  $\psi(t)$  definidos en la Figura 8.

El lector puede encontrar una descripción detallada de los parámetros cinemáticos, las transformaciones de coordenadas, y las velocidades para puntos materiales arbitrarios pertenecientes al ala en los trabajos de [Roccia y otros \(2008 y 2009\)](#).

### 3.2 Señales de entrada

Para la evolución temporal de los ángulos  $\phi$  y  $\psi$ , en este trabajo se adoptó la cinemática utilizada por Dickinson, mientras que, con el objeto de simplificar el análisis, el ángulo  $\theta$  se asume idénticamente igual a cero durante todo el ciclo de batimiento.

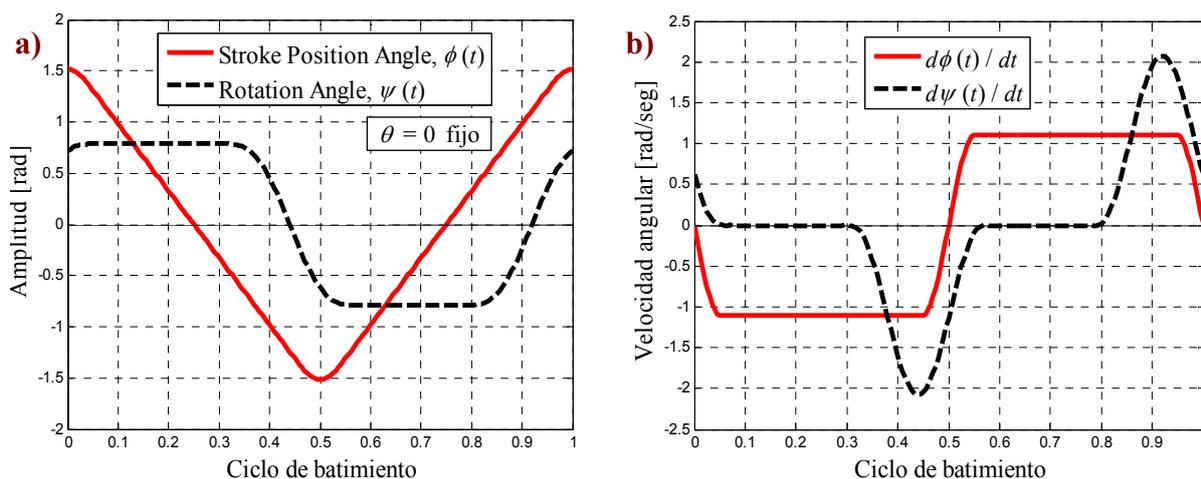


Figura 9: a) Evolución temporal de los ángulos  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$  durante un ciclo de batimiento; b) Derivada respecto del tiempo de los ángulos  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$ .

Como se puede observar en la Figura 9a (curva en línea continua de color rojo), la forma triangular de la función que describe la posición del ala dentro del plano de aleteo, implica que el ala se mueve con una velocidad constante en cada ‘half stroke’, por otro lado, la forma trapezoidal del ángulo de rotación (curva en línea a trazos de color negro en la Figura 9a) causa que el ala mantenga un ángulo de rotación constante durante cada ‘half stroke’ y rote con una velocidad constante en cada ‘reversal stroke’ según se observa en la Figura 9b.

## 4 EL MODELO AERODINÁMICO

El modelo aerodinámico implementado en este esfuerzo es una versión ampliada y modificada del método general de red de vórtices no-lineal e inestacionario (unsteady vortex lattice method o UVLM). Este modelo permite considerar no-linealidades aerodinámicas asociadas con grandes ángulos de ataque, deformaciones estáticas, y flujos dominados por vorticidad en los que el fenómeno conocido como *vortex bursting* no ocurre. Además, permite tener en cuenta todas las posibles interferencias aerodinámicas y estimar, en el dominio del tiempo, la distribución de vorticidad asociada a la sábana vorticiosa adherida a los sólidos, y la

distribución de vorticidad y la forma de las estelas emitidas desde los bordes filosos del cuerpo inmerso en el fluido. Si bien, el número de Reynolds que caracteriza el flujo real en los insectos es relativamente bajo, puede considerarse que tiene un valor lo suficiente alto como para asumir que los efectos viscosos están confinados, únicamente, a las capas límite que envuelven las alas y a las estelas vorticosas que se desprenden desde los bordes filosos. Este hecho permite utilizar el UVLM para predecir las cargas aerodinámicas que actúan sobre las alas batientes.

Como resultado del movimiento relativo entre el ala y el aire en reposo, se generan gradientes de velocidad que dan origen a vorticidad concentrada en una delgada región adherida a la superficie del ala (capa límite). Esta sabana vorticiosa se separa desde el borde de fuga y la puntera del ala y es ‘convectada’ hacia el seno del fluido para formar la estela.

Como se mencionó anteriormente, en el modelo utilizado se restringe toda la vorticidad del flujo a la capa límite adherida al sólido (las alas) y a las estelas; fuera de estas regiones el flujo se considera irrotacional. Las estelas se representan mediante sábanas vorticosas libres. Sus posiciones no son especificadas ya que pueden deformarse libremente hasta adoptar configuraciones libres de fuerzas, esto es, no se produce ningún salto de presiones a través de las estelas. El flujo asociado con la vorticidad en la estela cercana al ala afecta el flujo alrededor del ala y por lo tanto las cargas actuantes sobre ella.

Debido a que la vorticidad presente en las estelas en un instante dado fue generada y convectada desde el ala en un tiempo anterior, las cargas aerodinámicas dependen de la historia del movimiento; las estelas contienen la ‘historia’. El campo de velocidades asociado con la vorticidad existente en un punto del espacio decae al alejarse de dicho punto; en consecuencia, a medida que la vorticidad en la estela va siendo transportada corriente abajo, su influencia decrece y por lo tanto se dice que ‘el historiador’ va perdiendo memoria.

Los dos tipos de sábanas vorticosas (libre y adherida) están unidas en los bordes filosos de cada ala, donde se impone la condición de Kutta para flujos inestacionarios. A medida que el ala se mueve durante un ciclo de batimiento, el ángulo de ataque efectivo puede alcanzar valores altos produciendo una separación adicional del flujo desde el borde de ataque, justamente ese fenómeno se incorporó al modelo en este trabajo.

Para más detalles acerca de la formulación matemática del UVLM se pueden consultar los trabajos de [Konstadinopoulos y otros \(1981\)](#) y [Preidikman \(1998\)](#).

#### 4.1 Formulación matemática

Se denota mediante  $\mathbf{V}(\mathbf{R}, t)$  a la velocidad absoluta de una partícula de fluido que ocupa, en el tiempo  $t$ , la posición  $\mathbf{R}$  en el dominio fluido,  $p(\mathbf{R}, t)$  es la presión del fluido en ese punto  $\mathbf{R}$ , y  $\rho$  es la densidad, considerada constante, del fluido. Si el número de Reynolds es lo suficientemente alto y la densidad es constante, las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a las ecuaciones de Euler,

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad \text{donde} \quad \nabla \doteq \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1)$$

Esta ecuación es complementada con la ecuación de continuidad para flujos incompresibles,

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{R}, t) = 0 \quad (2)$$

El campo de velocidades  $\mathbf{V}(\mathbf{R}, t)$  está relacionado cinemáticamente con el campo de vorticidad a través de la siguiente expresión,

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{R}, t) = \nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{R}, t) \quad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) representan un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que pueden ser ‘invertidas’ a los efectos de expresar el campo de velocidades en términos del campo de vorticidad (Batchelor, 1967),

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V(\mathbf{R}_0, t)} \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}_0, t) \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)}{\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0\|^2} dV(\mathbf{R}_0, t) \quad (4)$$

donde  $V(\mathbf{R}_0, t)$  es una región del dominio fluido,  $\mathbf{R}_0$  es el vector posición que define esta región del dominio fluido, y  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}_0, t)$  es el vector vorticidad en el punto  $\mathbf{R}_0$ .

El integrando en la Ec. (4) es cero cuando  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{R}_0, t)$  es nulo, por lo tanto, la región donde el flujo es irrotacional no contribuye al campo de velocidades  $\mathbf{V}(\mathbf{R}, t)$  y este puede ser determinado tanto en la región viscosa como en la no viscosa considerando únicamente la distribución de vorticidad en la región viscosa.

La Ecuación (4) que gobierna la evolución de las sábanas vorticosas esta mal condicionada y sufre de una inestabilidad del tipo de Kelvin–Helmholtz (Majda y Bertozzi, 2002). Estudios anteriores (Moore, 1979; Krasny, 1986; Caflisch y Orellana, 1989; Shelley, 1992) han determinado que: *i*) la solución de esta ecuación puede desarrollar singularidades en tiempo finito; aun en el caso en que las condiciones iniciales sean suaves, y *ii*) el intento de computar numéricamente esta solución mediante el uso de una aproximación basada en segmentos vorticosos amplifica los errores de discretización de forma tal que eventualmente la hacen “explotar”.

#### 4.2 Discretización de las sábanas vorticosas

En el método de red de vórtices inestacionario se reemplazan las sábanas adheridas continuas por una red de paneles rectangulares formados por segmentos vorticosos rectilíneos y cortos,  $\boldsymbol{\omega}_i$ , conectados entre si en los llamados *nodos aerodinámicos*. El modelo se completa mediante una discretización similar de las estelas como se muestra en la ver Figura 10. En esa figura se indican en color rojo los puntos donde ocurre el desprendimiento de vorticidad desde el borde de fuga y en color verde los puntos donde ocurre el desprendimiento desde el borde de ataque. En ambos casos, los nodos aerodinámicos involucrados en el desprendimiento no llegan hasta la raíz del ala, es decir, existe una banda (Zona 1 sobre el borde de ataque y Zona 2 sobre el borde de fuga) en la cual no se produce desprendimiento. Este ajuste mejora notablemente la forma de la estela que se obtiene en las proximidades de la raíz del ala.

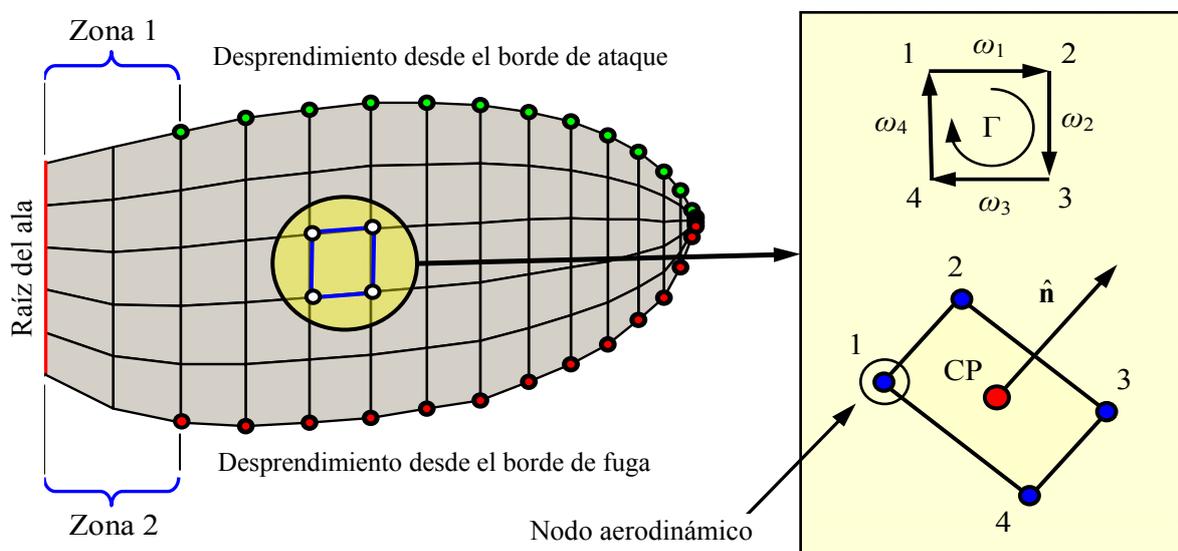


Figura 10: Discretización de la sábana vorticiosa adherida al ala.

La velocidad en un punto  $P$  que ocupa una posición espacial  $\mathbf{R}$ , asociada a un segmento vorticoso, rectilíneo, de longitud finita, y con circulación espacial constante,  $\Gamma$ , esta dada por la ley de Biot-Savart, esto es,

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}, t) = \frac{\Gamma(t)}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}, t) \times \mathbf{r}_1}{\|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}, t) \times \mathbf{r}_1\|^2} [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}, t) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2)] \quad (5)$$

donde  $\boldsymbol{\omega}$  es el vector vorticidad,  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son las distancias al extremo inicial y al extremo final del elemento vorticoso, y los  $\hat{\mathbf{e}}_1$  y  $\hat{\mathbf{e}}_2$  son vectores unitarios asociados a los vectores  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ .

Cuando el punto  $P$  pertenece al segmento vorticoso, la Ecuación (5) presenta una singularidad. Esta característica es indeseable desde el punto de vista numérico. El modo más común de sortear este problema consiste en reemplazar el núcleo singular de Cauchy  $\mathbf{K}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)$  de la ecuación (4), por un núcleo “suavizado”. Alternativas para suavizar el núcleo de Cauchy incluyen: “vortex-blob regularization”, “vortex-patch regularization”, “viscous regularization”, entre otras (Majda y Bertozzi, 2002). En este trabajo se sigue una técnica de regularización ad hoc de la integral de Biot-Savart, originalmente introducida por Chorin. En esta técnica, el núcleo singular,  $\mathbf{K}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)$ , es reemplazado por un núcleo suavizado,  $\mathbf{K}_\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0; \delta)$ , de manera tal que cuando el parámetro  $\delta$  (comúnmente conocido como radio de “cut-off”) tiende a cero se recupera la solución correspondiente a un flujo no viscoso gobernado por las ecuaciones de Euler. Con esta regularización, la expresión para el campo de velocidades asociado a un segmento vorticoso rectilíneo, (5), toma la siguiente forma:

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}, t) = \frac{\Gamma(t)}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}, t) \times \mathbf{r}_1}{\|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}, t) \times \mathbf{r}_1\|^2 + (\delta \|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}, t)\|)^2} [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}, t) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2)] \quad (6)$$

El valor del radio de cut-off, desconocido a priori, se determina a partir de comparaciones entre simulaciones realizadas mediante el uso de la Ecuación (6) y soluciones conocidas que fueron obtenidas mediante el uso de otras técnicas.

### 4.3 Modelo de desprendimiento del borde de ataque

El desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque no ocurre en forma continua durante todo el ciclo de batimiento ya que depende del ángulo que forma la dirección de la velocidad local del fluido con el plano del ala,  $\alpha_e$  (leading edge shedding angle). Existen numerosos trabajos que estudian las condiciones bajo las cuales se produce este tipo de fenómeno como así también la estabilidad del mismo (Dickinson, 1994; Van den Berg y Dickinson, 1997). El ángulo adoptado en este trabajo como límite a partir del cual ocurre el desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque es  $\alpha_e = 15^\circ$  (ver Figura 11).

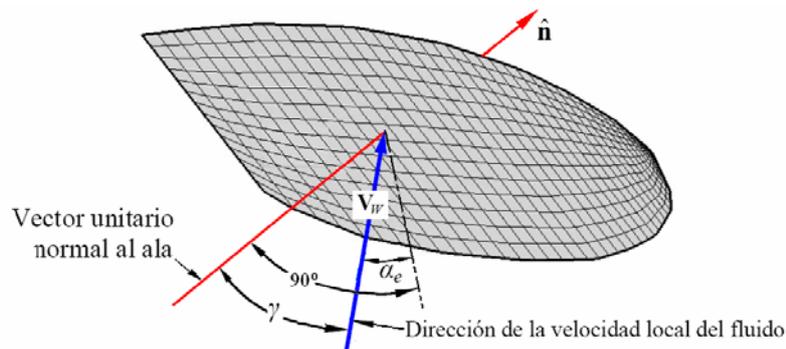


Figura 11: Definición del ángulo  $\alpha_e$ .

El ángulo de desprendimiento,  $\alpha_e$ , se define como el complemento del ángulo  $\gamma$  que forma la dirección de la velocidad local de fluido,  $\mathbf{V}_w$ , con respecto a la dirección normal al ala,  $\hat{\mathbf{n}}$ .

#### 4.4 Condiciones de borde

Las condiciones de borde que se imponen en este problema son dos: *i*) la condición en el infinito y *ii*) la condición de no penetración. La condición en el infinito requiere que las perturbaciones debidas al cuerpo moviéndose a través del fluido que estaba inicialmente en reposo se anulen lejos del sólido en movimiento. Esto es equivalente a decir que las velocidades asociadas a la vorticidad de las sábanas libres y adheridas tienden a cero lejos del insecto, matemáticamente,

$$\lim_{\mathbf{R} \rightarrow \infty} \|\mathbf{V}_B(\mathbf{R}, t) + \mathbf{V}_w(\mathbf{R}, t)\| \rightarrow 0 \quad (7)$$

donde  $\mathbf{V}_B(\mathbf{R}, t)$  es la velocidad asociada a la sábana vorticiosa adherida a las alas del insecto, y  $\mathbf{V}_w(\mathbf{R}, t)$  es la velocidad asociada a la sábana vorticiosa libre (estela).

La condición de no penetración es aplicada sobre toda la frontera del sólido inmerso en el fluido, esto es, sobre la superficie de las alas. Su posición, velocidad, y aceleración son conocidas en todo instante. Esta condición de borde, también llamada de impermeabilidad, requiere que la componente normal de la velocidad relativa a la superficie del cuerpo de todas las partículas del fluido adyacentes a la superficie del sólido sea igual cero,

$$(\mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_w - \mathbf{V}_p) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (8)$$

donde  $\mathbf{V}_\infty$  es la velocidad de la corriente libre (en caso de que exista),  $\mathbf{V}_p$  es la del sólido (alas) (Roccia y otros, 2009), y  $\hat{\mathbf{n}}$  es un vector unitario normal a la superficie del cuerpo.

#### 4.5 Magnitudes características

Con el objetivo de aumentar la generalidad del software desarrollado e independizarnos de las dimensiones del problema bajo estudio, las ecuaciones que rigen la evolución espacio-temporal de las estelas y la ecuación inestacionaria de Bernoulli utilizada para computar las cargas aerodinámicas sobre el sólido fueron adimensionalizadas respecto de un conjunto de tres magnitudes características independientes y una cuarta dependiente de las otras tres. Estas cantidades son: *i*) la longitud característica,  $L_c$ ; *ii*) el tiempo característico,  $T_c$ ; y *iii*) la densidad característica,  $\rho_c$ . Por último la velocidad característica,  $V_c$ , es simplemente el cociente entre las cantidades  $L_c$  y  $T_c$  respectivamente.

El problema atacado en este trabajo presenta dos complicaciones adicionales que se materializan básicamente en la ausencia de una velocidad de corriente libre (la configuración de vuelo estudiada es el hover) y a la presencia de una velocidad prescrita sobre el sólido (alas) debida a la cinemática que caracteriza el complejo movimiento de las alas de los insectos.

La compatibilización entre el modelo aerodinámico y el modelo cinemático se reduce esencialmente a forzar la igualdad entre el incremento de tiempo utilizado para calcular la velocidad angular de las alas,  $\Delta t_{cinemat}$ , y el incremento de tiempo utilizado en el modelo aerodinámico para determinar la nueva posición de las estelas,  $\Delta t_{aero}$ . Esto es,

$$\Delta t_{aero} = \Delta t_{cinemat} \quad (9)$$

De la aerodinámica se deduce, además, que,

$$\begin{aligned}\Delta t_{aero} &= 1 \\ \Delta t_{aero}^* &= T_c \Delta t_{aero} = T_c\end{aligned}\quad (10)$$

En este trabajo el asterisco sobre una variable cualquiera denota una cantidad dimensional. Por otro lado,

$$\Delta t_{cinemat}^* = T_f \Delta t_{cinemat}^b = \frac{1}{n_f} \Delta t_{cinemat}^b \quad (11)$$

donde  $T_f$  es el período de un ciclo de batimiento,  $\Delta t_{cinemat}^b$  es el incremento de tiempo en las señales de entrada para los ángulos  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$  mostrados en la Figura 9a y  $n_f$  fue definida anteriormente en la Sección 3 ( $n_f = 0,168$  Hz).

Para lograr  $\Delta t_{cinemat} = 1$ , se define,

$$\Delta t_{cinemat} = N_{st} \Delta t_{cinemat}^b = 1 \quad (12)$$

donde  $N_{st}$  es el número de pasos de tiempo.

Sabiendo que el incremento de tiempo dimensional,  $\Delta t^*$ , es único para el modelo completo ( $\Delta t^* = \Delta t_{aero}^* = \Delta t_{cinemat}^*$ ), finalmente se obtiene,

$$T_c = \frac{1}{n_f} \Delta t_{cinemat}^b = \frac{1}{n_f} \frac{1}{N_{st}} \Delta t_{cinemat} \quad \Rightarrow \quad T_c = \frac{1}{n_f} \frac{1}{N_{st}} \quad (13)$$

El resto de las magnitudes características se definen de la siguiente manera,

$$L_c = \sqrt{\frac{A}{N_E}} \quad V_c = \frac{L_c}{T_c} \quad \rho_c = \rho_{aceite} \quad (14)$$

donde  $A$  es el área de todos los paneles que conforman la sábana adherida,  $N_E$  es el número de paneles, y  $\rho_{aceite}$  es la densidad del aceite mineral utilizado en el experimento de Dickinson.

#### 4.6 Cálculo de las cargas aerodinámicas

Para determinar las cargas aerodinámicas sobre la superficie sustentadora, primero se debe hallar el salto de presión en el punto de control de cada elemento, luego multiplicarlo por el área del mismo y proyectarlo en la dirección del vector normal a dicho elemento. La versión inestacionaria de la ecuación de Bernoulli se usa para calcular la distribución de la presión sobre la superficie de las alas. Finalmente, se suman las fuerzas actuantes en todos los elementos.

Para flujos inestacionarios, la ecuación de Bernoulli toma la siguiente forma,

$$H(t) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{R}, t) + \frac{1}{2} \nabla \Phi(\mathbf{R}, t) \cdot \nabla \Phi(\mathbf{R}, t) + \frac{p(\mathbf{R}, t)}{\rho} \quad (15)$$

donde  $\Phi(\mathbf{R}, t)$  es la función potencial de velocidad,  $\mathbf{V}(\mathbf{R}, t) = \nabla \Phi(\mathbf{R}, t)$ , y  $H(t)$  la energía total.

Utilizando las magnitudes definidas en la Ec. (13) y (14) es posible adimensionalizar la Ec. (15) y determinar el salto de presión,  $\Delta p$ , a través de cada uno de los elementos que conforman la red de vórtices,

$$\Delta p = \mathbf{V}_U^2 - \mathbf{V}_L^2 + 2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\mathbf{R}_U} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\mathbf{R}_L} \right) \quad (16)$$

donde  $\mathbf{V}_U$  y  $\mathbf{V}_L$  son respectivamente las velocidades de las partículas de fluido ubicadas inmediatamente por encima y por debajo del punto de control del elemento considerado.

El último término de la expresión (16) puede escribirse como:

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\mathbf{R}_U} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\mathbf{R}_L} \right) = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}t} [\Phi(\mathbf{R}_U, t) - \Phi(\mathbf{R}_L, t)] - \Delta \mathbf{V} \cdot (\mathbf{V}_p) \quad (17)$$

donde  $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}t$  es una ‘especie de derivada sustancial’, ya que no sigue una partícula de fluido sino un punto material del ala, en este caso un punto de control,  $\Delta \mathbf{V}$  es la diferencia de velocidad entre un punto ubicado en la parte superior e inferior de la superficie sustentadora en el elemento considerado, y  $\mathbf{V}_p$  es la velocidad del sólido.

La inclusión del desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque dificulta el cómputo del primer término del lado derecho en la Ec. (17), impidiendo aplicar resultados conocidos basados en la utilización del teorema de Stokes (Preidikman, 1998). Este nuevo ingrediente exige derivar una nueva técnica para calcular las cargas sobre la superficie sustentadora, ya sea mediante la implementación de un esquema de diferencias finitas para integrar las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que relacionan el campo de presiones con el campo de velocidades (ecuaciones de Navier-Stokes) o modificar los resultados existentes hasta el momento de manera que permitan tener en cuenta fenómenos de este tipo.

En este trabajo se desprecia el término que involucra la “derivada sustancial” del potencial de velocidades. Por lo tanto, la expresión para el salto de presión se simplifica de la siguiente manera,

$$\Delta p = \mathbf{V}_U^2 - \mathbf{V}_L^2 - 2 \Delta \mathbf{V} \cdot (\mathbf{V}_p) \quad (18)$$

## 5 SIMULACIONES NUMÉRICAS

En esta sección se presentan gráficos que muestran la evolución temporal de las partículas vorticosas que se desprenden desde el borde de fuga, puntera del ala y borde de ataque como así también, gráficos de sustentación,  $L$ , en función del tiempo. Los resultados graficados fueron obtenidos con la herramienta computacional desarrollada por los autores de este trabajo. El código está escrito con Fortran 90 compilado para ser ejecutado en un sistema operativo Windows®. Para obtener mayor velocidad de ejecución se han utilizado opciones de optimización automáticas específicas para procesadores Intel® disponibles en el compilador de Fortran empleado.

En este esfuerzo se consideraron dos casos:

Caso a) no se incluye el desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque.

Caso b) se incluye desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque.

Los dos casos presentados en este esfuerzo se ejecutaron para un ciclo de batimiento completo. El tiempo de ejecución en el caso a) fue de 4 horas mientras que en el caso b) fue de 10 horas. Ambos casos se ejecutaron en una computadora de escritorio con una memoria RAM DDR2 de 2 Gb y un procesador con una velocidad de reloj de 3 GHz, con tecnología de 2 núcleos.

## 5.1 Evolución temporal de la estela

La evolución temporal de la estela se obtiene evaluando la velocidad local de las partículas de fluido que se encuentran en la ubicación de las ‘singularidades’ (segmentos vorticosos finitos). Esta velocidad es la suma vectorial de la velocidad asociada a todos los vórtices existentes (adheridos y libres) y la velocidad de la corriente libre. Esta velocidad multiplicada por el paso de tiempo elegido,  $\Delta t$ , da lugar a un vector desplazamiento que permite actualizar la posición de cada uno de los vórtices libres. Debido a que la estela se encuentra libre de fuerzas; la intensidad de los vórtices libres permanece constante.

En las Figuras 12 y 13 se muestra la evolución temporal de las estelas para dos diferentes instantes de tiempo. En color verde se indica la estela desprendida desde el borde de fuga y puntera del ala y en color rojo la estela desprendida desde el borde de ataque. Notar que en las Figuras 12a y 13a se ha ignorado el desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque, (caso a) algo que si se ha considerado en las Figuras 12b y 13b correspondientes al caso b. Se observa que el método implementado capta con gran detalle las interacciones aerodinámicas estelas/estelas y alas/estelas. Estas figuras son meramente cualitativas y son el producto de un primer análisis que tiene como objetivo futuro un estudio completo y cuantitativo de los mecanismos de vuelo asociados al complejo movimiento de las alas de un insecto inmerso en un medio fluido.

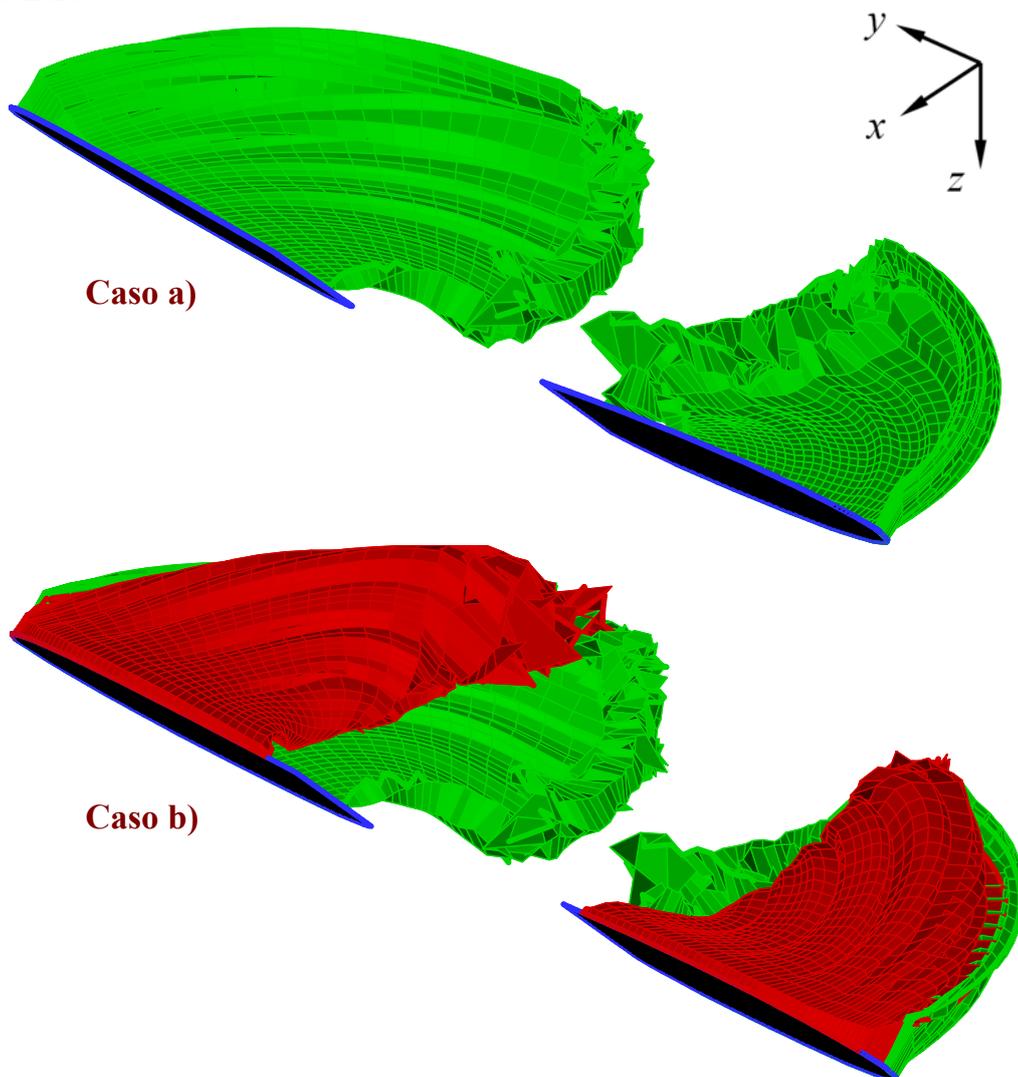


Figura 12: Evolución de la estela al 25% del ciclo de batimiento. En el caso a) se ha ignorado el desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque.

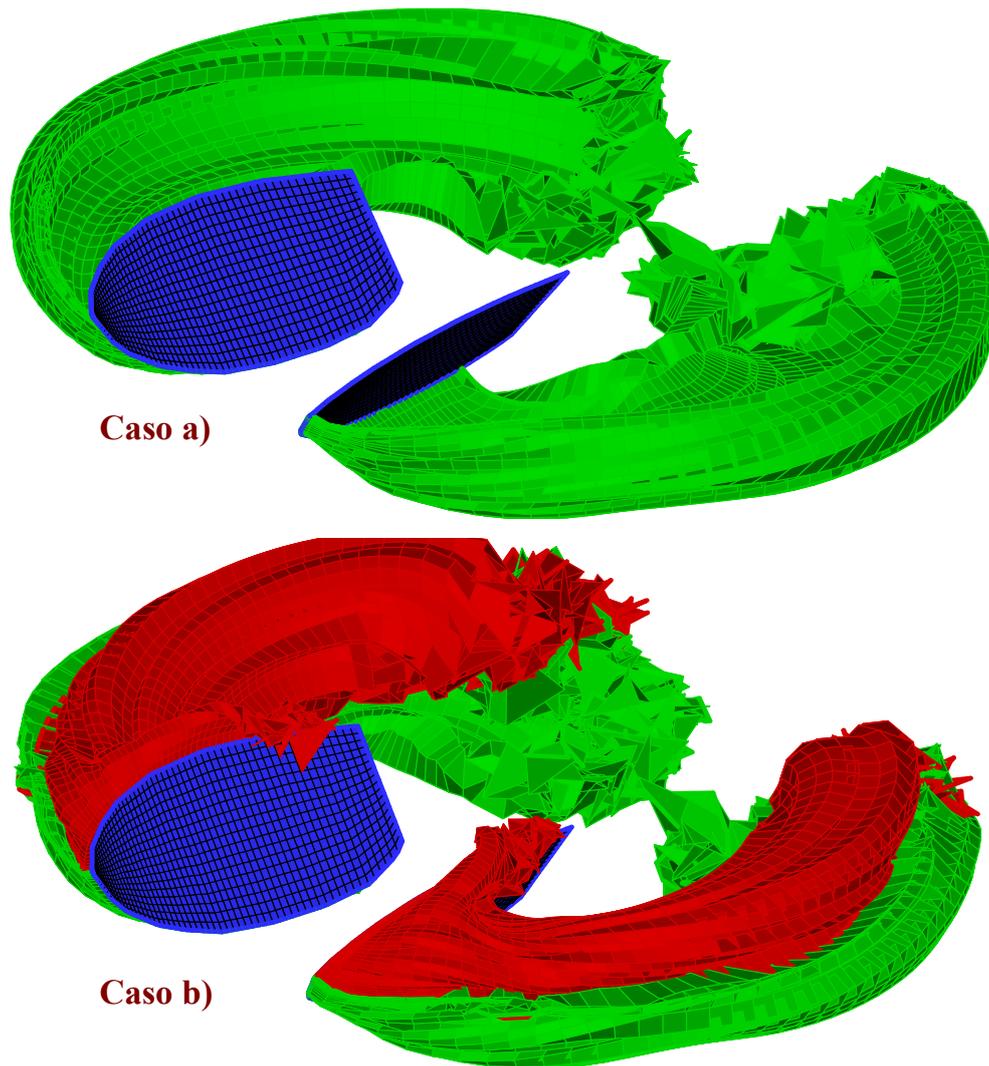


Figura 13: Evolución de la estela al 50% del ciclo de batimiento.  
En el caso a) se ha ignorado el desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque.

## 5.2 Fuerza de sustentación

En la Figura 14 se presenta un gráfico de la fuerza de sustentación,  $L$ , versus el tiempo adimensionalizado con respecto al período de un ciclo de batimiento. Cada gráfico contiene dos curvas: caso a) sin considerar el desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque (línea continua de color azul) y caso b) considerando desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque (línea de trazos de color rojo).

Las dos curvas presentadas en la Figura 14 fueron obtenidas a partir del cálculo del salto de presión a través de la superficie sustentadora (Ec. 18). La fuerza de sustentación obtenida no corresponde a la carga real sobre el ala debido a la ausencia de un término correspondiente a la porción no estacionaria de la ecuación inestacionaria de Bernoulli. A pesar de esta simplificación, la curva correspondiente al modelo que incluye desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque predice un aumento en la sustentación bastante marcado respecto al modelo estándar. Este aumento se da, básicamente, durante cada fase traslacional (downstroke/upstroke) y hacia el final de cada una de estas fases, siendo la máxima diferencia obtenida en la fuerza de sustentación del 30,5 % y se produce exactamente al 38 % y al 86 % del ciclo de batimiento (se pueden observar dos picos bastante pronunciados en dichos puntos).

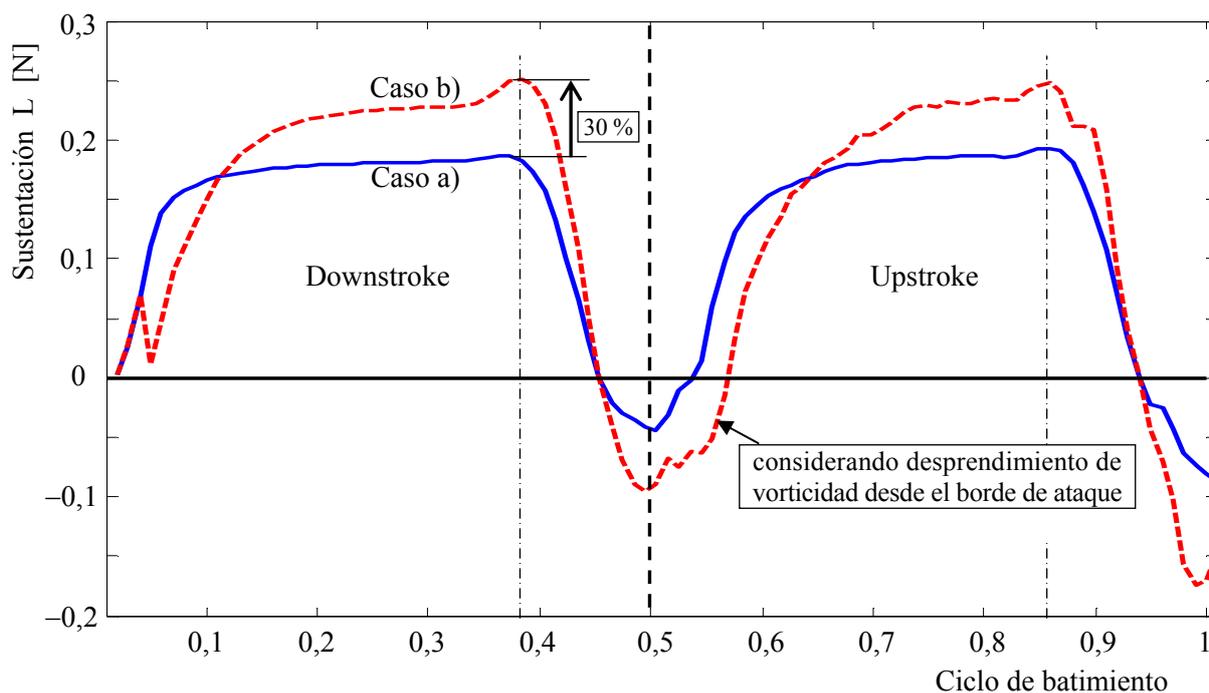


Figura 14: Fuerza de sustentación sobre cada ala.

## 6 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este trabajo, se presentó una herramienta computacional (en desarrollo) muy versátil, basada en una ampliación y modificación del método de red de vórtices inestacionario y no-lineal en su versión tridimensional. El código elaborado es flexible y permite el ingreso de diferentes patrones cinemáticos posibilitando, de esta manera, un estudio integral de la aerodinámica asociada a las alas batientes.

Se desarrolló un algoritmo numérico que permite incluir el desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque de las alas batientes y se lo combinó exitosamente con el UVLM. El modelo aerodinámico empleado permitió captar de manera satisfactoria la distribución de vorticidad asociada a la sábana vorticosa adherida al ala, la distribución de vorticidad y forma de las estelas, y la interacción aerodinámica entre las estelas que se desprenden desde las alas batientes y entre las estelas y las alas.

Se encontró que la presencia del desprendimiento de vorticidad desde el borde de ataque tiene una incidencia significativa en el aumento de la fuerza de sustentación (máxima diferencia de alrededor del 30 % hacia el final de cada fase traslacional). Este resultado es crucial porque permitiría explicar las grandes fuerzas de sustentación medidas experimentalmente en una gran variedad de insectos en vuelo libre.

Actualmente se está desarrollando una técnica que permita computar el término correspondiente a la “derivada sustancial” del potencial de velocidades, algo que no fue tenido en cuenta en este esfuerzo.

Si bien el carácter de este trabajo es fundamentalmente cualitativo, permite demostrar que el modelo utilizado constituye un buen punto de partida para llegar a comprender de forma definitiva los mecanismos de vuelo utilizados por los insectos, como así también para combinar esta formulación con modelos de la dinámica estructural que permitan estudiar la aeroelasticidad del vuelo de insectos y aves pequeñas, y la aeroservoelasticidad de micro-vehículos aéreos de alas batientes inspirados en la biología.

## REFERENCIAS

- Ansari, S.A., Żbikowski, R. and Knowles, K., Non-linear unsteady aerodynamics model for insect-like flapping wings in the hover. Part 2: implementation and validation. *Aerospace Engineering*, 220:169-186, 2006.
- Batchelor, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1967.
- Caflich, R. and Orellana, O., Singular solutions and Ill-posedness of the evolution of vortex sheets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 20:417-430, 1989.
- Dickinson, M.H., Lehmann, F.O. and Sane, S.P., Wing rotation and the aerodynamic basis of insect flight. *Science*, 284:1954-1960, 1999.
- Dickinson, M.H., The effect of wing rotation on unsteady aerodynamic performance at low Reynolds numbers. *The Journal of Experimental Biology*, 192:179-206, 1994.
- Gordon, J., *The New Science of Strong Materials, or Why You Don't Fall Through the Floor*, 2nd Edition, Pelican-Penguin, London, 1976.
- Konstadinopoulos, P., Mook, D.T. and Nayfeh, A.H., A numerical method for general unsteady aerodynamics. AIAA-81-1877. *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, August 19-21, Albuquerque, New Mexico, 1981.
- Krasny, R., A study of singularity formation in a vortex sheet by the point-vortex approximation. *Journal of Fluid Mechanics*, 167:65-93, 1986.
- Majda, A.J. and Bertozzi, A.L., *Vorticity and incompressible flow*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2002.
- Michelson, R.C. and Naqvi, M.A., Beyond biologically-inspired insect flight, *Low RE Aerodynamics on Aircraft Including applications in Emerging UAV Technology RTO-AVT von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture*, 2003.
- Moore, D.W., The rolling up of a semi-infinite vortex sheet, *Proceedings of the Royal Society. Series A*, 345:417-430, 1975.
- Mueller, T.J. and Delaurier, J.D., An overview of micro air vehicle aerodynamics. *Progress in Astronautics and Aeronautics*, 195:1-10, 2001.
- Preidikman, S., Numerical simulations of interactions among aerodynamics, structural dynamics, and control systems. *Ph.D. Dissertation*, Department of Engineering Science and Mechanics, Virginia Tech, 1998.
- Roccia, B., Preidikman, S., y Massa, J., De la biología a los insectos robots: Desarrollo de un código computacional interactivo para estudiar la cinemática de alas batientes. *Mecánica Computacional*, 27:3041-3058, 2008.
- Roccia, B., Preidikman, S., Ceballos, L., y Massa, J., Implementación del método de red de vórtices no-lineal e inestacionario para estudiar la aerodinámica de las alas batientes, *Mecánica Computacional*, 28:2955-2973, 2009.
- Sane, S.P. and Dickinson M., The control of flight fore by a flapping wing: Lift and drag production. *The Journal of Experimental Biology*, 204:2607-2626, 2001.
- Sane, S., The aerodynamics of insect flight. *The Journal of Experimental Biology*, 206:4191-4208, 2003.

- Shelley, M.J., A study of singularity formation in vortex sheet motion by a spectrally accurate vortex method, *Journal of Fluid Mechanics*, 244:493–526, 1992.
- Singh, B., Ramasamy, M., Chopra, I. and Leishman, J.G., Experimental studies on insect-based flapping wings for micro hovering air vehicles. *Alfred Gessow Rotorcraft Center, Department of Aerospace Engineering, University of Maryland at College Park, MD 20742*, 2004.
- Singh B. and Chopra I., Airloads prediction for flapping and rotary wing MAVs. *10<sup>th</sup> International workshop on aerolasticity of rotorcraft systems*, 2006.
- Tarvirdizadeh, B., A mathematical model for a flapping wing micro aerial vehicle. *Proceedings of the 17th IASTED International Conference, Modeling and Simulation*, Montreal, Canada, pp. 326-333, 2006.
- Van den Berg, C., and Ellington, C., The three-dimensional leading-edge vortex of a ‘hovering’ model hawkmoth. *Phil. Transaction Royal Society London B*, 352:329-340, 1997.