

# MODELOS TEÓRICOS Y NUMÉRICOS PARA PREDECIR EL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE PARARROTORES

Joaquín Piechocki<sup>a</sup>, Vicente Nadal Mora<sup>a</sup>, Ángel Sanz Andrés<sup>b</sup> y Santiago Pezzotti<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Grupo de Ingeniería Aplicada a la Industria, Departamento de Aeronáutica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Calle 116 e/47 y 48, (1900) La Plata, Argentina, [giai@ing.unlp.edu.ar](mailto:giai@ing.unlp.edu.ar), <http://www.ing.unlp.edu.ar/aeron/giai>*

<sup>b</sup>*Instituto de Microgravedad "Ignacio Da Riva", Universidad Politécnica de Madrid, IDR /UPM, España, [angel.sanz.andres@upm.es](mailto:angel.sanz.andres@upm.es), <http://www.idr.upm.es>*

**Palabras clave:** Pararrotor, decelerador, sonda, estabilidad, dinámica.

**Resumen:** Se han desarrollado diversos modelos teóricos y un simulador numérico para predecir el comportamiento dinámico de deceleradores aerodinámicos basados en el concepto del pararrotor. El pararrotor desciende en la atmósfera rotando en un régimen de autorrotación, generando una resistencia aerodinámica que frena la caída del cuerpo. Sus potenciales aplicaciones están vinculadas con la desaceleración de cuerpos en la baja atmósfera, como la recuperación de vehículos espaciales y el transporte de sensores para la medición de parámetros atmosféricos, entre otros. El objetivo de esta línea de investigación es conocer el desempeño de este tipo de deceleradores, a través de la identificación de los parámetros que rigen su comportamiento y de la cuantificación de esta influencia.

El primer modelo teórico, desarrollado a partir de las fuerzas aerodinámicas generadas por las palas, permite determinar la velocidad de caída, la velocidad de rotación y la resistencia aerodinámica en la dirección de caída, para una dada geometría y características aerodinámicas de las palas.

Un segundo modelo teórico, desarrollado a partir de las ecuaciones de movimiento del pararrotor, permite conocer su comportamiento dinámico, incluyendo su estabilidad; para los casos en que las palas pasan por el centro de masas del cuerpo y cuando están desplazadas respecto a ese punto.

Se ha desarrollado también un simulador numérico basado en las ecuaciones de la dinámica del pararrotor que permite predecir su comportamiento dinámico para distintas condiciones de vuelo y configuración.

Los modelos están ajustados y validados con ensayos experimentales.

## NOMENCLATURA

$A$ ,	matriz de coeficientes de la linealización del sistema de ecuaciones del movimiento,
$a$ ,	coeficiente de resistencia inducida,
$A_{ij}$ ,	coeficientes de fila $i$ y columna $j$ de la matriz $A$ ,
$c_D$ ,	coeficiente de resistencia aerodinámica de la pala,
$c_{DM}$ ,	coeficiente de resistencia aerodinámica del modelo en la dirección de descenso,
$c_{La}$ ,	pendiente de la curva de sustentación de la pala,
$C_M$ ,	centro de masas del pararrotor,
$C_{Pi}$ ,	centro de presiones en ejes cuerpo de la pala $i$ ,
$D$ ,	resistencia aerodinámica,
$Det$ ,	determinante de la matriz característica,
$\overline{D}_i$ ,	resistencia generada por la pala $i$ ,
$D_{ij}$ ,	componente $j$ de la resistencia de la pala $i$ ,
$e$ ,	factor de eficiencia,
$\overline{e}_{Di}$ ,	versor en la dirección de la resistencia de la pala $i$ ,
$\overline{e}_i$ ,	versor $i$ del sistema de ejes cuerpo solidario al pararrotor,
$\overline{e}_{Li}$ ,	versor en la dirección de sustentación de la pala $i$ ,
$F_T$ ,	fuerza en dirección al plano de rotación de las palas,
$k$ ,	velocidad de rotación adimensional,
$k_{21}$ ,	relación $r_{21}/r_{11}$ ,
$k_{31}$ ,	relación $r_{31}/r_{11}$ ,
$k_e$ ,	relación de momentos de inercia,
$K_i$ ,	constante de relación de inercia
$I_i$ ,	momentos principales de inercia,
$L$ ,	fuerza de sustentación,
$\overline{L}_i$ ,	fuerza de sustentación sobre la pala $i$ ,
$L_{ij}$ ,	componente $j$ de la sustentación de la pala $i$ ,
$N_e'$ ,	número de estabilidad,
$\overline{M}$ ,	momento generado por las fuerzas exteriores sobre el cuerpo,
$\overline{M}_i$ ,	componentes de los momentos de las fuerzas exteriores en la dirección $i$ ,
$\overline{n}_i$ ,	matriz de transformación para la obtención del módulo de la proyección de un vector sobre la dirección perpendicular a la pala $i$ ,
$R$ ,	resultante de las fuerzas aerodinámicas,
$r_{ij}$ ,	componente $j$ de la posición de la pala $i$ al respecto del centro de masas del cuerpo,
$S$ ,	área de una sola pala,
$S_D$ ,	área del sector circular generado por las palas.
$S_p$ ,	área total de las dos palas,
$T$ ,	fuerza aerodinámica en dirección del eje vertical del sistema de ejes cuerpo,
$Tr$ ,	traza de la matriz característica
$U_\infty$ ,	velocidad del pararrotor en dirección al eje vertical inercial,
$\overline{U}_R$ ,	velocidad relativa del flujo sobre la pala,
$\overline{U}_T$ ,	velocidad tangencial de las palas adimensional,
$U_T$ ,	velocidad tangencial de las palas,

$v_{i0}$ ,	velocidad inducida a punto fijo,
$V_{ni}$ ,	velocidad normal a la pala $i$ ,
$\overline{V}_{ri}$ ,	velocidad relativa de la pala $i$ ,
$V_i$ ,	velocidad del pararrotor con respecto a los ejes inerciales,
$\overline{V}_{ic}$ ,	velocidad del pararrotor con respecto a los ejes inerciales expresado en coordenadas del cuerpo,
$V_v$ ,	velocidad de descenso,
$V_{vi}$ ,	velocidad de descenso inducido,
$\overline{V}_v$ ,	velocidad de descenso adimensional,
$\omega$ ,	velocidad angular en dirección del eje vertical en coordenadas ejes cuerpo,
$\omega_i$ ,	velocidad angular en dirección del eje $i$ en coordenadas ejes cuerpo,
$\omega_0$ ,	velocidad angular de referencia,
$x_i$ ,	variable $i$ del sistema de ecuaciones de movimiento adimensionalizadas, $\omega_i/\omega_0$ ,
$x_{eqi}$ ,	variable $i$ del sistema de ecuaciones de movimiento adimensionalizadas, $\omega_i/\omega_0$ , para el equilibrio.
$\alpha$ ,	ángulo de ataque de las palas (ángulo coincidente para ambas palas),
$\alpha_i$ ,	ángulo de ataque de la pala $i$ ,
$\beta$ ,	ángulo de ataque de las palas (ángulo coincidente para ambas palas),
$\beta_i$ ,	ángulo de paso de la pala $i$ ,
$\delta_\beta$ ,	diferencia de paso entre las palas,
$\lambda_{1,2}$ ,	autovalores de la matriz $A$ ,
$\lambda_{Ai}$ ,	primer término del autovalor $i$ de la matriz $A$ ,
$\lambda_{Bi}$ ,	segundo término del autovalor $i$ de la matriz $A$ ,
$\lambda_{re i}$ ,	parte real del autovalor $i$ de la matriz $A$ ,
$\lambda_{im i}$ ,	parte imaginaria del autovalor $i$ de la matriz $A$ ,
$\theta$ ,	ángulo de nutación,
$\rho$ ,	densidad del aire,
$\varphi$ ,	ángulo de rotación propia del cuerpo,
$\psi$ ,	ángulo de precesión del cuerpo,
$\Delta$ ,	discriminante de la matriz característica,
$\phi$ y $\Theta$ ,	ángulo de incidencia del flujo, $U_\infty/(\omega_3 r_{11})$ ,
$\sigma$ ,	solidez del rotor,
$\Lambda$ ,	alargamiento.

# 1 INTRODUCCIÓN

El pararrotor es un dispositivo desacelerador aerodinámico basado en la autorrotación de alas giratorias. La autorrotación es la rotación continua de un cuerpo inmerso en un flujo axial sin otras fuentes externas de energía más que la propia acción de la corriente de fluido y de la gravedad. Cuando el cuerpo se desplaza en un fluido, las palas rotan y, como consecuencia de este movimiento, se generan fuerzas aerodinámicas que actúan en oposición a su movimiento de translación principal. Su desempeño y utilización práctica están supeditados al conocimiento de su dinámica del vuelo en función de los parámetros aerodinámicos y geométricos del dispositivo. El objetivo de esta línea de investigación es conocer el desempeño de este tipo de deceleradores, a través de la identificación de los parámetros que rigen su comportamiento y de la cuantificación de esta influencia.

Se han desarrollado en el presente trabajo dos enfoques teóricos y un simulador numérico para predecir el comportamiento dinámico de deceleradores aerodinámicos basados en el concepto del pararrotor.

El primer modelo teórico, desarrollado a partir de las fuerzas aerodinámicas generadas por las palas, permite determinar la velocidad de caída, la velocidad de rotación y la resistencia aerodinámica en la dirección de caída, para una dada geometría y características aerodinámicas de las palas.

Un segundo modelo teórico, desarrollado a partir de las ecuaciones de movimiento del pararrotor, permite conocer su comportamiento dinámico, incluyendo su estabilidad; para los casos en que las palas pasan por el centro de masas del cuerpo y cuando están desplazadas respecto a ese punto.

Se desarrolló también un simulador numérico basado en las ecuaciones de la dinámica del pararrotor que permite predecir su comportamiento dinámico para distintas condiciones de vuelo y configuración.

El sistema a estudiar corresponde a un dispositivo que desciende rotando en régimen de autorrotación, compuesto por un cuerpo cilíndrico con alas de pequeño alargamiento compuestas por placas planas, como se indica en la Figura 1.

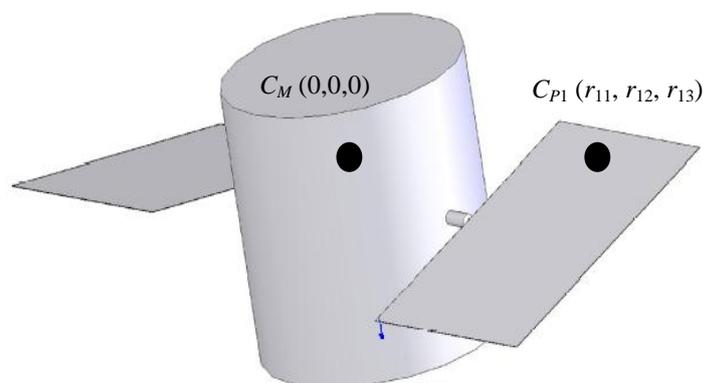


Figura 1: Esquema del pararrotor, donde se muestran las coordenadas de centro de masas y del centro de presiones de la pala 1

## 2 MODELO SEMI-EMPÍRICO BASADO EN LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y FUERZAS SOBRE EL MODELO

### 2.1 Desarrollo

El presente modelo es capaz de describir el comportamiento de un pararrotor en autorrotación que rota alrededor de un eje fijo, validado para un rango de ángulo de paso de las palas y número de Reynolds. El comportamiento del vehículo resulta gobernado por una cantidad reducida de parámetros adimensionales. El sistema estudiado aquí consiste en un cuerpo rotando, dotado de dos palas de pequeño alargamiento, que alcanza una situación de autorrotación estacionaria. Las fuerzas generadas por las palas hacen que el cuerpo continúe rotando.

Dadas las características geométricas y aerodinámicas del pararrotor, como las dimensiones de sus alas, el coeficiente de resistencia  $C_D$ , y el ángulo de paso de las palas  $\beta$ , etc., el modelo permite determinar: la relación entre la velocidad de descenso y velocidad de rotación del dispositivo,  $k$ , la velocidad de descenso adimensional,  $\overline{V}_v$ , la velocidad tangencial  $\overline{U}_T$ , el coeficiente de resistencia del modelo  $C_{DM}$  (resistencia en la dirección de descenso), el ángulo de ataque de las palas,  $\alpha$ , y el ángulo de incidencia del flujo sobre las palas,  $\phi$ .

Se definen:  $\overline{V}_v = \frac{V_v}{v_{i0}}$  y  $\overline{U}_T = \frac{U_T}{v_{i0}}$ , donde  $v_{i0} = \sqrt{\frac{T}{2\rho S_D}}$  es la velocidad inducida a punto fijo.

Esta teoría no considera la existencia de un flujo cuasi-bidimensional en cada plano perpendicular a la envergadura de la pala, como sucede en la teoría de elemento de pala, que se utiliza para estudiar alas rotatorias de gran alargamiento. Por el contrario, como las alas que se abordan en este caso son de pequeño alargamiento, la hipótesis precedente no es válida. Como consecuencia se han modelado las fuerzas aerodinámicas actuando sobre las palas de una manera, conceptualmente muy simple: la determinación de curvas relacionando la sustentación neta y las fuerzas de resistencia sobre las palas en función de ángulo de ataque, las cuales se correlacionan con información experimental.

Este modelo matemático incluye también elementos de la teoría de cantidad de movimiento, utilizados para deducir la velocidad inducida por los vórtices y la circulación en las palas. El modelo se completa estableciendo el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre las palas requeridas para mantener el estado de autorrotación. La nomenclatura de las fuerzas aerodinámicas, velocidades y velocidades pueden verse en la Figura 2.

La relación de velocidades se define como  $k = V_v / (\omega R) = V_v / U_T$ .

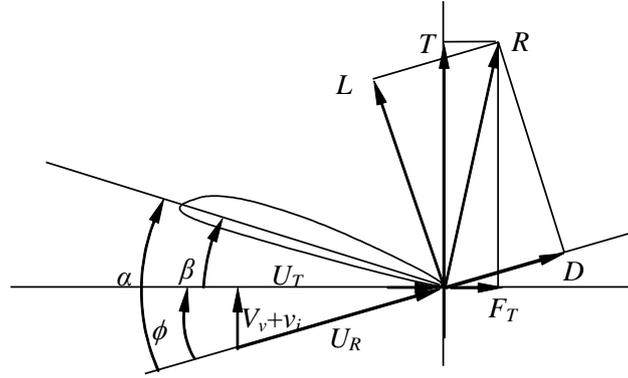


Figura 2: Ángulos, fuerzas netas, y velocidades vistas desde la pala

Se obtiene el siguiente conjunto de relaciones, como funciones del ángulo de incidencia del flujo  $\phi$ :

$$\beta = \frac{1}{\phi} \frac{c_D}{c_{L\alpha}} - \phi \quad (1)$$

$$\overline{U_T}^2 = \phi \frac{1}{\frac{\sigma}{4} c_D} \quad (2)$$

$$k = \phi + \frac{1}{\phi^2} \frac{\sigma}{4} c_D \quad (3)$$

$$-\overline{V}_v = \frac{\phi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{\sigma}{4} c_D}} + \sqrt{\frac{\sigma}{4} c_D} \phi^{\frac{3}{2}} \quad (4)$$

donde  $\sigma = \frac{S_P}{S_D}$  es la solidez del rotor. Como el cilindro que forma el cuerpo del parrotor ocupa el lugar donde por donde pasa el eje de rotación, las palas no llegan al eje de rotación. Se asume adicionalmente que  $c_D = c_{D0} + a \alpha^2$ .

Las expresiones anteriores muestran la influencia de los parámetros relevantes: la solidez  $\sigma$ , el coeficiente de resistencia  $c_D$  y la pendiente de la sustentación  $c_{L\alpha}$ .

Otro parámetro de performance de interés es el coeficiente de resistencia del modelo,  $c_{DM}$ , el cual se define como:

$$c_{DM} = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho V_v^2 S_P} \quad (5)$$

donde el área de referencia es el área total de las dos palas, y, entonces:

$$c_{DM} = \frac{U_T^2}{V_v^2} c_{L\alpha} \alpha = \frac{c_{L\alpha} \alpha}{k^2} = \frac{c_D}{\phi^3 + \frac{1}{\phi^3} \left( \frac{\sigma}{4} c_D \right)^2 + \frac{\sigma}{2} c_D} \quad (6)$$

El ajuste empírico del modelo se encuentra dado por la determinación experimental de los coeficientes aerodinámicos y su modelado. En particular, se proponen los modelos (Anderson, J., 1984; Stahl, W. H., 1979) que proponen las siguientes expresiones:

$$c_D = c_{D0} + \frac{c_L^2}{\pi e \Lambda} = c_{D0} + \frac{c_{L\alpha}^2 \alpha^2}{\pi e \Lambda} \quad (7)$$

$$c_L = \frac{\pi}{2} \Lambda \alpha + 4\alpha^2 \quad (8)$$

## 2.2 Determinación de los parámetros libres del modelo teórico

La aproximación seguida para determinar los parámetros libres del modelo teórico es hallar los valores de los coeficientes  $c_{D0}$ ,  $a$  y  $c_{L\alpha}$  que brindan el mejor ajuste entre los resultados experimentales y las predicciones del modelo. Para esto se procesaron los datos experimentales, se seleccionaron los datos y se realizó el ajuste. Los resultados se presentan en la tabla siguiente.

Configuración	$c_{D0}$	$a$	$c_{L\alpha}$	$dif(k)$ , %	$dif(\bar{V}_v)$ , %	$dif(\bar{U}_T^2)$ , %	$B$ , %	$N$
C01	0,07	2,4	3,4	4,7	6,6	6,0	5,7	4
C03	0,35	2,3	4,8	4,7	8,4	12,3	8,4	2
C07	0,08	2,0	3,4	3,0	7,0	4,0	4,6	4
C09	0,38	2,7	4,6	7,0	3,7	14,5	8,4	3

Tabla 1: Ajuste entre el modelo teórico y los resultados experimentales.

Los valores de  $c_{D0}$ ,  $a$  y  $c_{L\alpha}$  que dan las menores diferencias entre los parámetros teóricos y los experimentales han sido determinados mediante el método de mínimos cuadrados. Para esto se ha definido la distancia normalizada  $B$  como:

$$B = \frac{\sum_{i=1}^3 dif(p_i)}{3} \quad (9)$$

donde  $dif(p_i)$  es la diferencia entre los valores teóricos y experimentales para cada parámetro  $p_i$ .  $p_i$  representa cada uno de los parámetros:  $p_1 = k$ ,  $p_2 = -\bar{V}_v$ ,  $p_3 = \bar{U}_T^2$ . Se ha determinado el conjunto de valores de los tres coeficientes que minimizan la distancia  $B$  y, por lo tanto, los resultados obtenidos son los que mejor ajustan el modelo teórico al conjunto de las configuraciones experimentales (de acuerdo a la medida de distancia empleada).

## 2.3 Conclusiones

Se concluye de la aplicación de este modelo que es posible determinar relaciones adimensionales que permiten establecer el nivel de acoplamiento entre la traslación vertical del dispositivo y su rotación, basado en sus características aerodinámicas y geométricas. Por otro lado, se establece una relación de equilibrio entre la sustentación y la velocidad de rotación que permite predecir el desempeño del dispositivo decelerador. El presente modelo tiene una base experimental que permite el ajuste del modelo sobre la base de la determinación de los coeficientes aerodinámicos.

Este enfoque permite concluir que la dinámica rotacional y traslacional pueden estudiarse separadamente en el marco del comportamiento estacionario del pararrotor.

Se considera que el modelo teórico se ajusta razonablemente bien a los resultados experimentales. Se han probado diversas posibilidades y se ha encontrado que no es posible mejorar el ajuste, por lo que las diferencias existentes se deben, por un lado, a los propios errores asociados a los resultados experimentales y, por otro lado, a la idoneidad de las hipótesis con que se ha elaborado el modelo.

### 3 MODELO BASADO EN LAS ECUACIONES DE LA DINÁMICA

Para elaborar el modelo dinámico que permita estudiar la estabilidad del movimiento de un pararrotor en caída libre se desarrollaron las correspondientes ecuaciones la dinámica rotacional. La estabilidad del movimiento depende de dos parámetros no dimensionales ( $N_e'$  y  $k_e$ , que se definirán más adelante), que contienen características geométricas, inerciales y aerodinámicas del modelo. Se pueden definir regiones de estabilidad en diagramas basados en estos parámetros, donde distintos tipos de trayectorias (nodos, espirales y focos) pueden identificarse. Finalmente, se pueden determinar los ángulos de nutación del cuerpo.

#### 3.1 Desarrollo

Se considera un cuerpo que cae a velocidad uniforme,  $V_v$ , según la vertical y girando con velocidad angular  $\underline{\omega}$ . El sistema ejes cuerpo solidario al pararrotor, se designa por 1,2,3, con direcciones  $e_1, e_2, e_3$  y origen situado en el centro de masas. Estos son los ejes de inercia principales. El sistema de referencia inercial es  $X,Y,Z$ , cuyos ejes poseen las direcciones  $i,j,k$ . Es posible definir la orientación de la terna ejes cuerpo respecto de la inercial a partir de los ángulos de Euler.

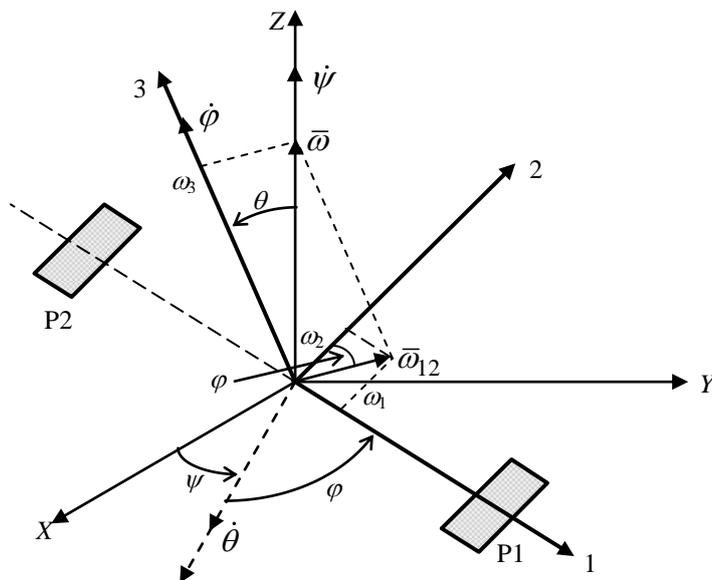


Figura 3: Definición de la geometría.  $\psi$ , precesión;  $\theta$ , nutación;  $\phi$ , rotación propia.  $(X,Y,Z)$ : sistema de referencia inercial.  $(1,2,3)$ : sistema de referencia fijo al cuerpo.  $\underline{\omega}$ : velocidad angular.

Se consideran las ecuaciones de Euler de la dinámica rotacional del pararrotor en el sistema

de referencia formado por los ejes de inercia principales, considerando el equilibrio de las variables traslacionales, que se adoptan como desacopladas.

Con el fin de evaluar los órdenes de magnitud de las ecuaciones Euler de la dinámica rotacional del pararrotor en el sistema de referencia formado por los ejes principales de inercia, se toma a la unidad como orden "0", y se consideran una serie de simplificaciones, las cuales restringirán el problema a un determinado campo de aplicación, dadas por:

- $\theta$ , ángulo de nutación; es de orden 1.
- $\beta_1$  y  $\beta_2$ , ángulos de paso de las palas; son de orden 1.
- $k = U_\infty/(\omega_3 r_{11})$  es de orden 1.
- $k_{21} = r_{21}/r_{11}$  es de orden 1.
- $c_D$  es de orden 1.
- los parámetros geométricos y aerodinámicos de ambas palas son idénticos, salvo su ángulo de paso.
- las fuerzas aerodinámicas no poseen componente en dirección de la envergadura de las palas.

Las componentes de la velocidad de caída en ejes cuerpo se obtienen mediante el producto de la matriz de rotación asociada a la transformación de Euler adoptada (que expresa la orientación del pararrotor con respecto a los ejes inerciales) y la velocidad relativa de los ejes cuerpo respecto de los inerciales.

Se consideran vectores normalizados en las direcciones de la sustentación y de la resistencia asociadas a cada pala, para, a posteriori, asignarles las magnitudes de las fuerzas aerodinámicas.

Es posible realizar un cambio de variables a las nuevas  $x_1 = \omega_1/\omega_0$  y  $x_2 = \omega_2/\omega_0$ , que permite desacoplar una de las ecuaciones de la dinámica de rotación de las restantes dos.

El sistema de ecuaciones de la dinámica del pararrotor, entonces, queda:

$$\frac{M_1}{I_1 \omega_0^2} + \left( \frac{I_2 - I_3}{I_1} \right) x_2 = \frac{dx_1}{dT} = f_1(x_1, x_2), \quad (10)$$

$$\frac{M_2}{I_2 \omega_0^2} - \left( \frac{I_1 - I_3}{I_2} \right) x_1 = \frac{dx_2}{dT} = f_2(x_1, x_2). \quad (11)$$

Para analizar la estabilidad del sistema en un entorno del punto de equilibrio se evalúan los autovalores de la matriz  $A$ , conformada por:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & A_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ A_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & A_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$k_{31} = r_{31}/r_{11}$  es el parámetro que indica el desplazamiento de las palas respecto del centro de masas del pararrotor. Si  $k_{31}$  es de orden 0 y contemplando los órdenes de magnitud mayores (tomando lo términos de hasta orden 2, la matriz  $A$  está dada por:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\rho S r_{11}^3}{I_1} (-4 c_D k_{31}^2) & \frac{I_2 - I_3}{I_1} + \frac{1}{2} \frac{\rho S r_{11}^3}{I_1} (c_{L\alpha} k_{31} (\beta_1 + \beta_2 - 4k) + 2 c_{L\alpha} k_{21}) \\ -\frac{I_1 - I_3}{I_2} & \frac{1}{2} \frac{\rho S r_{11}^3}{I_2} 2(-c_{L\alpha} - c_D) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

Despreciando los órdenes menores de magnitud se tiene:

$$x_{eq2} = \frac{2K_1 c_{L\alpha} \delta_\beta (-k_{31}k + k_{21})}{2K_1 c_{L\alpha} (k_{31}\beta_0 - 2k_{31}k + k_{21}) + \frac{I_2 - I_3}{I_1}}, \quad \text{donde } K_1 = \frac{1}{2} \frac{\rho S r_{11}^3}{I_1} \quad (14)$$

$$x_{eq1} = \frac{(-2 K_2 c_D - 2 K_2 c_{L\alpha}) x_{eq2} + 2 K_2 c_{L\alpha} \delta_\beta}{\frac{I_1 - I_3}{I_2}}, \quad \text{donde } K_2 = \frac{1}{2} \frac{\rho S r_{11}^3}{I_2} \quad (15)$$

Se deduce que el orden de magnitud de las variables en el equilibrio es al menos 2, y que sus signos dependen de los momentos de inercia y del parámetro  $k_{31}$ .

El análisis de la estabilidad de una matriz como la presentada en (13), supone establecer tres casos: cuando las raíces son imaginarias, cuando son reales y coincidentes, y cuando son reales y distintas. Para estos tres casos, la estabilidad asintótica del sistema linealizado se dará cuando la parte real de las raíces sea menor que cero (Chi-Tsong Chen, 1999). Del análisis de los signos del discriminante, traza y determinante se obtienen los diferentes tipos de trayectorias que pueden producirse (Hirsch & Smale, 1983).

### Análisis de casos según los parámetros $Ne'$ , $ke$

$k_e$  se define como una relación de momentos de inercia tal que:

$$k_e = 4k_{21}^2 \frac{I_2}{I_1} \frac{I_3 - I_1}{I_3 - I_2}$$

Es posible expresar por tanto:

$$\Delta = C^2 (Tr'^2 - k_e (1 - N_e')), \quad \text{donde } C^2 = \frac{(I_3 - I_2)^2}{4 k_{21}} \frac{I_1}{I_2}. \quad (16)$$

El límite de las regiones estables, dado por el caso en que los autovalores de la matriz  $A$  sean iguales a 0, equivale a decir que  $N_e' = 1$ .

Detalle del caso	Estabilización	Posibilidad de configuración estable	Regiones alcanzables del plano ( $N_e'$ , $k_e$ ).
$I_3 > I_2, I_1$	$k_{31} > 0$	Sí	1, 2.
$I_2 > I_3 > I_1$	$k_{31} > 0$	Sólo para valores de $k_{31} \gg 0$ , sin aplicación práctica	3, 4.
$I_1 > I_3 > I_2$	$k_{31} < 0$	Sí	3, 4.
$I_1, I_2 > I_3$	$k_{31} < 0$	Sí	1, 2.

Tabla 2: Casos de configuración geométrica. Contribución de  $k_{31}$  a la estabilidad.

Para pequeños desplazamientos del eje que contiene a las palas respecto del centro de masas, la estabilidad del pararrotor (del modelo del sistema linealizado) no se ve afectada por el parámetro  $k_{31}$ , respecto del caso en que este eje pase por el centro de masas (Nadal Mora & Sanz-Andrés, 2006), bajo las hipótesis del modelo y las simplificaciones realizadas según los órdenes de magnitud de cada término. Sin embargo, esta distancia sí influye en la estabilidad dinámica del dispositivo, si es del orden de la distancia desde el centro de presiones de las palas al eje de revolución del pararrotor.

Es posible tipificar la contribución del parámetro  $k_{31}$ , como se presenta en la Tabla 2.

El modelo analítico propuesto permite establecer condiciones de estabilidad y parámetros de control para el dispositivo desacelerador.

La estabilidad del pararrotor se encuentra definida en mayor medida por la relación de los momentos de inercia del dispositivo. Para pequeños desplazamientos del eje que contiene a las palas respecto del centro de masas, la estabilidad del pararrotor no se ve afectada por el parámetro  $k_{31}$ , respecto del caso en que este eje pase por el centro de masas, bajo las hipótesis del modelo y las simplificaciones realizadas según los órdenes de magnitud de cada término.

Para desplazamientos del orden de la distancia desde el centro de presiones de las palas al eje de revolución del pararrotor o mayores, estos sí influyen en la estabilidad dinámica del dispositivo.

En los casos que  $I_3 > I_2, I_1$  y  $I_1 > I_2, I_3$  es posible obtener configuraciones estables del desacelerador aerodinámico. En ambos casos, los valores positivos del parámetro  $k_{31}$  (centro de masas por debajo del plano que contiene a las palas) contribuyen a la estabilidad del sistema. En el caso que  $I_3 > I_2, I_1$ , el parámetro  $k_{31}$  contribuye a la estabilidad, si este es mayor que cero, aunque la magnitud de esta contribución es menor. En el caso que se esté cerca del límite estabilidad del sistema este parámetro resulta definitorio de la estabilidad. Esta relación de momentos de inercia resulta el caso de mayor aplicación práctica.

En el caso que  $I_2 > I_3 > I_1$ , el pararrotor se comporta de manera inestable, sin que los efectos del parámetro  $k_{31}$  resulten determinantes. En el caso que  $I_1 > I_3 > I_2$ , el pararrotor se comporta en general de manera inestable. No obstante es posible alcanzar zonas de estabilidad para valores muy grandes de  $k_{31}$ . En el caso que  $I_1 > I_2, I_3$  el parámetro  $k_{31}$  contribuye a la estabilidad tanto si este es mayor que cero como si este es menor que cero.

El parámetro  $k_{31}$  podría utilizarse como parámetro de control del sistema, al igual que la diferencia entre los ángulos de paso de las palas. Este hecho se verifica al observar los términos independientes de la linealización del modelo matemático del sistema (13) que incluyen estos parámetros. Su utilización podría utilizarse para el guiado del dispositivo con velocidades de respuesta controladas. En cualquier caso ambos parámetros resultan parámetros de diseño determinantes.

Es posible determinar los ángulos de nutación,  $\theta$ , y de rotación propia,  $\phi$ , de acuerdo con la geometría del pararrotor, sobre la base de la descomposición de la velocidad angular en coordenadas móviles sobre la terna móvil.

#### **4 MODELO DE SIMULACIÓN NUMÉRICA**

La metodología adoptada ha sido plantear las ecuaciones de la dinámica del pararrotor en su formulación completa para su cómputo numérico sobre casos específicos.

Se adopta como herramienta de cálculo el programa Scilab (similar al Matlab), el cual permite expresar en forma mimética (imitando circuitos analógicos) las distintas expresiones matemáticas de la formulación. A partir de la creación de un modelo gráfico del sistema

matemático es posible simular numéricamente el sistema.

La simulación numérica supone el establecimiento de un determinado intervalo de tiempo, y de determinadas condiciones iniciales, sobre las cuales se computará el modelo matemático.

Para la simulación numérica de la dinámica del pararrotor se utilizaron cuaterniones ortonormalizados para la definición de la orientación relativa de los ejes cuerpo al respecto de los ejes inerciales. A su vez, se transformaron estos cuaterniones en ángulos de Euler para la representación de la orientación del pararrotor, a partir de una matriz de transformación para el pasaje de coordenadas y vectores de un sistema a otro, de acuerdo con las expresiones para la representación de la actitud compendiadas por (Diebel, 2006).

El desarrollo del modelo matemático comprende:

- el planteo de la representación de los ejes móviles al respecto de los inerciales,
- el planteo de las ecuaciones de la dinámica del pararrotor,
- el planteo de las expresiones de fuerzas y momentos aerodinámicos de forma completa, introduciendo el efecto del desplazamiento de centro de masas al respecto del plano formado por las palas,
- el planteo del modelo gráfico de las expresiones matemáticas que se usarán como fuente de simulación.

Las condiciones de orientación iniciales para el comienzo de la simulación corresponden a la definición del conjunto de ángulos de Euler que la describan dadas por  $Eul_0 = (\varphi_0, \theta_0, \psi_0)$ .

A los fines de la simulación numérica se consideran dos modelos: uno simplificado basado en las ecuaciones de la dinámica rotacional sobre la base del equilibrio de la dinámica translacional (vale decir que el pararrotor tendrá 3 grados de libertad asociados con su movimiento rotacional) y otro con las ecuaciones de la dinámica rotacional y translacional (el pararrotor tendrá 6 grados de libertad). El primer modelo ofrece la posibilidad de realizar simulaciones más económicas en términos de costo computacional y establecer patrones básicos de comportamiento dinámico. El segundo permite la simulación de estados transitorios y condiciones de vuelo específicas y particulares.

La estrategia de cómputo numérico de las ecuaciones diferenciales de la dinámica se basa en la integración en pasos a partir de valores iniciales de:

- Aceleración angular
- Aceleración translacional
- Velocidad traslacional

Se realizan, entonces, tres procesos de integración sobre cada uno de estos parámetros, que permitirán conocer la evolución de la dinámica del pararrotor sobre la base de datos de iniciales. El resultado de estos procesos entregan resultados de:

- Velocidad angular
- Velocidad translacional
- Posición

Los datos de entrada, independientemente de las fuerzas y los momentos, que permiten la ejecución de esta rutina de cálculo, incluyendo los cálculos asociados a la determinación de la orientación del pararrotor en el tiempo, son entonces:

- Parámetros de simulación:
- Tiempo de integración
- Método de integración numérica
- Tipo de paso de integración (fijo o variable)
- Velocidad inicial - Ejes cuerpo
- Orientación inicial - Euler

- Velocidad angular inicial

La simulación numérica de la dinámica del pararrotor se puede esquematizar a partir del siguiente ordenamiento, para cada paso de integración:

- Cálculo de fuerzas y momentos generadas por las palas de acuerdo al enfoque planteado en el modelo analítico de la dinámica del pararrotor.
- Cómputo (integración numérica) de dinámica del pararrotor y orientación basado en el método de cuaterniones

La determinación de las fuerzas y de los momentos generados en las palas del pararrotor son la base de la simulación de su comportamiento dinámico.

Se adopta para el cálculo numérico un paso de integración fijo de 0,005 segundos, utilizando el método de Dormand & Prince (1980).

Para la validación de la simulación de la dinámica del pararrotor se consideró el caso de un cuerpo rígido con tensor de inercia cilíndrico (o cuerpo axilsimétrico) no sometido a momentos ni fuerzas exteriores, con velocidades condiciones iniciales de translación nulas y determinada velocidad rotacional. Los resultados se compararon con la solución de problema clásico del movimiento sin momentos exteriores (Thomson, 1986).

De las simulaciones realizadas se puede concluir que las condiciones de estabilidad que se verifican coinciden con aquellas indicadas por el modelo analítico. Si se analizan los parámetros  $N_e'$ ,  $k_e$  se puede observar que las regiones de estabilidad son más reducidas a las que predice el modelo analítico. Se verifica por otro lado que la influencia del parámetro  $k_{31}$  en la estabilidad es pequeña en magnitud.

De las simulaciones se desprende que es posible alcanzar configuraciones estables del pararrotor en los casos:

- $I_3 > I_2, I_1$ ,
- $I_3 < I_2, I_1$ ,
- y  $I_2 < I_3 < I_1$ .

En el caso que  $I_3 > I_2, I_1$ , el parámetro  $k_{31} > 0$  contribuye positivamente a la estabilidad del sistema. Por otro lado el parámetro  $k_{21} > 0$  contribuye positivamente a la estabilidad del sistema. En el caso que  $I_3 < I_2, I_1$ , el parámetro  $k_{31}$  no contribuye positivamente a la estabilidad. En particular si  $k_{31} > 0$ , resulta un factor de fuerte inestabilización. En el caso que  $I_2 < I_3 < I_1$  el parámetro  $k_{31} > 0$  puede resultar estabilizador, sobre la base de alcanzar las regiones estables de  $N_e'$ ,  $k_e$  predichas en el modelo analítico.

Por otro lado se comprueba, que el parámetro  $k_{31}$  desplaza el límite de estabilidad del sistema en el plano  $N_e'$ ,  $k_e$ . Para el caso que  $I_3 > I_2, I_1$  si  $k_{31} > 0$  el límite de estabilidad se mueve hacia regiones donde el valor de  $N_e'$  es menor, y a la inversa si  $k_{31} < 0$ . No obstante frente al caso de una configuración con  $k_{31}=0$  que esté en el límite de la región estable, un aumento del parámetro  $k_{31}$  hará que  $N_e'$  disminuya de tal manera que el caso migre hacia regiones estables, aún cuando el límite de estabilidad se mueva hacia valores de  $N_e'$  menores.

## 5 RESULTADOS

Los resultados generales de las investigaciones presentadas conforman un cuerpo de herramientas que facilitan la utilización práctica de dispositivos basadas en el concepto de pararrotor. Resulta posible predecir su desempeño, sus condiciones de estabilidad y su respuesta dinámica sobre los 6 grados de libertad del cuerpo rígido en vuelo. Vale decir que este conjunto de modelos representa la herramienta básica de modelado práctico de un pararrotor.

El primer modelo permite encontrar una relación de acoplamiento en régimen estacionario entre la dinámica rotatoria y traslacional, sobre la base de la configuración geométrica y las características aerodinámicas del pararrotor.

El segundo modelo estudia la estabilidad del dispositivo sobre la base de un movimiento traslacional estacionario. Se concluye que la estabilidad dinámica del dispositivo se encuentra determinada en mayor medida por la relación de momentos de inercia, y por sus características aerodinámicas, la distancia del centro de presiones de cada pala al centro de masas y el paso de las palas.

En los casos que  $I_3 > I_2, I_1$  y  $I_1 > I_2, I_3$  es posible obtener configuraciones estables del desacelerador aerodinámico. En el caso que  $I_1 > I_3 > I_2$ , el pararrotor se comporta en general de manera inestable. No obstante es posible alcanzar zonas de estabilidad para valores muy grandes de  $k_{31}$ . En el caso que  $I_1 > I_2, I_3$  el parámetro  $k_{31}$  contribuye a la estabilidad tanto si este es mayor que cero como si este es menor que cero.

El parámetro  $k_{31}$  podría utilizarse como parámetro de control del sistema, al igual que la diferencia entre los ángulos de paso de las palas.

Es posible determinar los ángulos de nutación,  $\theta$ , y de rotación propia,  $\phi$ , de acuerdo con la geometría del pararrotor, sobre la base de la descomposición de la velocidad angular en coordenadas móviles sobre la terna móvil.

El tercer modelo (numérico) permite por un lado verificar los resultados del modelo analítico, comprobando el efecto de los órdenes de magnitud despreciados en él sobre distintas condiciones de estabilidad y convalidando sus conclusiones. Por otro lado permite observar el comportamiento dinámico del dispositivo en estudio sobre la base del planteamiento completo de las ecuaciones de su dinámica. Aún más, permite ensayar en forma computacional el comportamiento dinámico en vuelo de un dispositivo específico.

Si se analizan los parámetros  $N_e'$ ,  $k_e$  se puede observar que las regiones de estabilidad son más reducidas a las que predice el modelo analítico. Se verifica por otro lado que la influencia del parámetro  $k_{31}$  en la estabilidad es pequeña en magnitud.

Por otro lado se comprueba que el parámetro  $k_{31}$  desplaza el límite de estabilidad del sistema en el plano  $N_e'$ ,  $k_e$ . Para el caso que  $I_3 > I_2, I_1$  si  $k_{31} > 0$  el límite de estabilidad se mueve hacia regiones donde el valor de  $N_e'$  es menor, y a la inversa si  $k_{31} < 0$ . No obstante frente al caso de una configuración con  $k_{31}=0$  que esté en el límite de la región estable, un aumento del parámetro  $k_{31}$  hará que  $N_e'$  disminuya de tal manera que el caso migre hacia regiones estables, aún cuando el límite de estabilidad se mueva hacia valores de  $N_e'$  menores.

## 6 DISCUSIÓN

Los resultados presentados permiten proyectar el uso práctico de un pararrotor sobre la base de modelos analíticos con contribuciones y ajustes empíricos. No obstante la validación, profundización y ajuste de los modelos depende en gran medida de la información experimental que se logre obtener, lo cual es objeto de investigaciones presentes.

Resulta de importancia elaborar estrategias de control para el guiado y el desempeño del pararrotor. En los presentes modelos se presentan potenciales parámetros para estos fines que deberán ser abordados por estudios específicos.

La utilización práctica de este concepto permitiría la utilización de sondas de bajo costo para la exploración no tripulada. El estudio específico de diseños basados en el concepto de pararrotor, su desempeño, estabilidad y controlabilidad, son áreas vacantes a desarrollar, con

implicancias tecnológicas de gran importancia.

## 7 REFERENCIAS

Anderson, J., *Fundamentals of aerodynamics*, Mc. Graw Hill, 1984.

Chi-Tsong Chen, *Linear System Theory and Design*, 3rd Edition, Oxford University Press, 1999.

Elsgolts. *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*. Editorial MIR. 1977.

Guzmán Ozámiz, Miguel de. *Ecuaciones diferenciales ordinarias: teoría de estabilidad y control*. Editorial Alhambra, 1987.

Hirsch & Smale. *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y algebra lineal*. Ed. Alianza. 1983.

Idelsohn, S., and Oñate, E., Finite element and finite volumes. Two good friends. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:3323–3341, 1994.

Nadal Mora. *Comportamiento aerodinámico de sondas atmosféricas en entornos aeroportuarios*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, España, 2005.

Nadal Mora., Sanz-Andrés. *Stability Analysis of a Free Falling Pararotor*, *Journal of Aircraft*, Vol. 43, No. 4, pp. 980-986, 2006.

Nadal Mora, Sanz-Andrés, A. and Cuerva, A. *Model of the aerodynamic behavior of a pararotor*, *Journal of Aircraft*, Vol. 43, No. 6, pp. 1893-1903, 2006.