

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EN MALLAS NO ESTRUCTURADAS APLICADO A FLUJO COMPRESIBLE

Weht German, Giovacchini Juan Pablo, Sacco Carlos, D'Errico Mario

*Dpto. Mec. Aer., Facultad de Ingeniería, Instituto Universitario Aeronáutico
Av. Fuerza Aérea 6500 (X5010JMX) Córdoba, Argentina.
e-mail: gweht@iua.edu.ar, página web: <http://www.iua.edu.ar>*

Palabras clave: CFD, Flujo compresible, Elementos Finitos

Resumen. En el siguiente trabajo se presenta un esquema explícito en elementos finitos de las ecuaciones de Euler aplicado a dominios bidimensionales (2D). Los problemas de inestabilidad numérica que poseen estas ecuaciones se abordan utilizando una formulación Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) para advección dominante, y un método de alto orden para el caso de inestabilidad producida por discontinuidades en la solución. El parámetro de estabilización τ o matriz de tiempo intrínseco se obtiene según los métodos propuestos por Tezduyar, mientras que en la estabilización por choque se utiliza un parámetro denominado *pressure switch*, el cual impone correcciones de acuerdo a los saltos de presiones entre nodos adyacentes.

Del esquema explícito propuesto, se evalúan diferentes métodos de discretización temporal, realizando un estudio comparativo entre métodos de primer orden (Forward Euler) y de orden superior (Runge-Kutta), con el objetivo de determinar el costo computacional frente a la precisión temporal analizando problemas sencillos de aplicación.

En lo que respecta a resultados, se analizaron diferentes problemas de interés con motivo de comparar y evaluar las performances del esquema implementado, se analizaron problemas en régimen de flujo transónico, supersónico e hipersónico, obteniendo resultados aceptables según se contrasta con soluciones analíticas exactas.

1. INTRODUCCIÓN

El análisis en problemas de ingeniería que involucren la determinación del comportamiento del fluido en regímenes de flujo compresible abarca un amplio rango de aplicaciones, desde flujo interno en turbomáquinas hasta flujo externo en aplicaciones aeronáuticas o aeroespaciales en condiciones de vuelo transónica, supersónica e hipersónica. De los métodos utilizados en el análisis de problemas en flujo compresible, en las últimas décadas, con el crecimiento de la capacidad de cálculo de las computadoras, el método de elementos finitos se presenta como una alternativa interesante frente a los métodos tradicionales implementados con anterioridad. Entre las mayores ventajas, debido a su formulación puede notarse una versatilidad en aplicaciones a geometrías arbitrarias pudiendo imponer condiciones de borde sin problemas relevantes en casos generales.

El método de elementos finitos es ampliamente utilizado en problemas gobernados por sistemas de ecuaciones hiperbólicas no lineales. Un problema importante dentro de este grupo, son las ecuaciones de la dinámica de fluidos utilizadas para modelar el movimiento de un flujo compresible no viscoso, conocidas como las ecuaciones de Euler de la dinámica de los gases. De la naturaleza no lineal de las ecuaciones de Euler se obtienen soluciones discontinuas caracterizadas por presencia de choques. Estas discontinuidades dan origen a inestabilidades numéricas creando oscilaciones en la solución, que en ocasiones provocan divergencia de la misma. Muchas formulaciones o métodos de estabilización se han propuesto desde los comienzos de la mecánica computacional con motivo de atenuar las oscilaciones y asegurar la convergencia a una solución que presente discontinuidades. Los primeros algoritmos de estabilización utilizados en el método de elementos finitos (aún utilizados en la actualidad), son en general extensiones de los métodos de estabilización desarrollados en diferencias finitas. Los métodos de estabilización utilizados en problemas de flujo compresible tienen asociado un término para estabilizar efectos de advección dominante, más un término de estabilización que contempla efectos de discontinuidades o de choque. En este trabajo se utiliza una técnica de estabilización SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*) similar a la de alto orden presentada en [5] para estabilizar la presión en problemas de flujo incompresible. En este método se evalúa un parámetro de estabilización denominado tiempo intrínseco, el cual juega un rol fundamental en la estabilización y se utiliza una formulación para el tiempo intrínseco presentada en [3, 4]. El método de captura de discontinuidades que se utiliza, es un esquema similar al presentado en [9], donde se determina un parámetro escalar denominado “pressure switch” el cual se anula cuando la variación de presión es lineal, y toma valor unitario en zonas de discontinuidades.

Se adopta un esquema de discretización temporal explícito el cual presenta la ventaja de permitir un orden de discretización arbitrario, pudiendo comparar entre diferentes métodos de resolución temporal. Se implementaron varios métodos, entre ellos, el método de Euler explícito o forward Euler, y esquemas basados en métodos de Runge-Kutta propuestos en [10] donde se presentan los coeficientes de manera que el orden de precisión pueda incrementarse sistemáticamente, dando versatilidad al algoritmo propuesto.

El contenido de este trabajo por sección es el siguiente: en la sección 2 se presentan las ecuaciones de Euler de la dinámica de fluidos compresibles no viscosos, se obtienen las ecuaciones en una forma conservativa cuasi-lineal, resultando una formulación de utilidad en la implementación en problemas de flujo compresible en mecánica computacional. En la sección 3 se presentan el método de estabilización y captura de discontinuidades utilizados. En la sección 4 se muestra la ecuación de conservación discretizada aplicando método de residuos ponderados de Galerkin para su implementación en elementos finitos. En la sección 5 se presentan las discretizaciones temporales utilizadas junto con algunos resultados encontrados respecto a la implementación de las mismas. La sección 6 muestra algunos resultados utilizando la formulación propuesta aplicado a ejemplos clásicos para comprobar la precisión del código y se comparan también algunos resultados teóricos de interés.

2. ECUACIONES DE LA DINÁMICA DE FLUIDOS

Las ecuaciones de Euler de la dinámica de fluidos son un caso particular de las ecuaciones de Navier-Stokes en cuales no se consideran efectos viscosos ni transferencia de calor. Las ecuaciones de Euler respresentan un sistema de leyes de conservación no lineal hiperbólico, expresando la conservación de masa, momento, y energía definidos por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho H u) = 0 \quad (3)$$

donde ρ , u , p , E y $H = E + p/\rho$ son la densidad, velocidad, presión, energía total por unidad de masa, y entalpía de estancamiento respectivamente. Considerando un gas ideal politrópico, se tiene la siguiente ecuación de estado, la cual brinda una relación adicional necesaria para que el sistema de ecuaciones quede determinado:

$$p = (\gamma - 1) \rho \left(E - \frac{|u|^2}{2} \right) \quad (4)$$

donde γ es la relación de calores específicos. Se adopta $\gamma = 1,4$ para aire.

Introduciendo un vector U de variables conservativas, las ecuaciones de conservación 1,2, y 3 pueden escribirse en forma compacta utilizando los vectores de flujo advectivo $F(U)_i$ donde para el caso bidimensional que se analiza $i = 1, 2$ corresponde a los ejes x_1, x_2 respectivamente. Utilizando una notación compacta, se obtiene el siguiente sistema en leyes de conservación:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F(U) = 0 ; \text{ donde } \nabla \cdot F(U) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \quad (5)$$

donde:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho E \end{bmatrix} ; F_i = \begin{bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + p \delta_{1i} \\ \rho u_2 u_i + p \delta_{2i} \\ \rho H u_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

Siguiendo la metodología de [1], expresando (5) como un sistema en forma cuasi-lineal se tiene:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \quad (7)$$

donde los $A_i = \frac{\partial F_i}{\partial U}$ se denominan jacobianos advectivos. Para el caso bidimensional se presentan en forma desarrollada en las ecuaciones (8) y (9) siguientes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{\gamma}}{2} \|u\|^2 - u_1^2 & (3 - \gamma) u_1 & -\bar{\gamma} u_2 & \bar{\gamma} \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 & 0 \\ (\bar{\gamma} \|u\|^2 - \gamma E) u_1 & \gamma E - \frac{\bar{\gamma}}{2} \|u\|^2 - \bar{\gamma} u_1^2 & -\bar{\gamma} u_1 u_2 & \gamma u_1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -u_1 u_2 & u_2 & u_1 & 0 \\ \frac{\bar{\gamma}}{2} \|u\|^2 - u_2^2 & -\bar{\gamma} u_1 & (3 - \gamma) u_2 & \bar{\gamma} \\ (\bar{\gamma} \|u\|^2 - \gamma E) u_2 & -\bar{\gamma} u_1 u_2 & \gamma E - \frac{\bar{\gamma}}{2} \|u\|^2 - \bar{\gamma} u_2^2 & \gamma u_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

con $\bar{\gamma} = \gamma - 1$.

Luego, el problema queda definido adicionando a la ecuación 7 las condiciones iniciales y las condiciones de borde adecuadas al problema analizado. Considerando la ecuación 7 junto con el esquema de estabilización y captura de discontinuidades se discretiza el problema para obtener la formulación en elementos finitos en el dominio de análisis.

3. ESQUEMA DE ESTABILIZACIÓN Y CAPTURA DE DISCONTINUIDADES.

3.1. Algoritmo de estabilización

Con motivo de estabilizar el término convectivo en forma consistente, asegurando que la solución del problema en el límite de la discretización sea solución de la ecuación diferencial 7, se utilizaron en los últimos años varias técnicas de estabilización. Una de las más utilizadas es la formulación SUPG propuesta inicialmente en [2] con ampliación en [3] y [4], la cual garantiza que las oscilaciones espureas existentes en las zonas de elevados gradientes, oscilaciones intrínsecas al algoritmo numérico utilizado, no se propagen a todo el dominio computacional. Básicamente, el método de SUPG consiste en adicionar un término a la ecuación variacional de Galerkin que contemple una contribución elemento a elemento dependiendo del residuo local de la ecuación diferencial. La idea de adicionar este término puede identificarse con la adición de viscosidad artificial para simular los efectos de la viscosidad física sobre la discontinuidad, atenuando su efecto en el resto del dominio de análisis donde los gradientes son despreciables.

En este trabajo se utiliza una formulación SUPG de alto orden basada en la estabilización de la presión presentada en [5] para flujo incompresible. Esta formulación, considera el término de estabilización como una proyección ortogonal del término clásico de SUPG en el espacio de elemento finito. La expresión del término de estabilización es:

$$\tau A_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} - \vartheta \right) \quad (10)$$

donde ϑ es un vector que surge de la formulación utilizada definido por:

$$\vartheta = A_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (11)$$

τ es un parámetro de estabilización denominado matriz de tiempo intrínseco y juega un rol fundamental en la técnica de estabilización. τ debe desaparecer cuando el mallado es refinado, de hecho, la convergencia es afectada con el comportamiento asintótico de τ . En este trabajo se adopta una formulación de estabilización denominada $(SUPG)_{82}$ propuesta en [3]. Las expresiones que definen a τ se obtienen de [3, 4, 7] y se presentan a continuación:

$$\tau_{SUPG}^i = \left(\frac{1}{(\tau_{sugn1}^i)^r} + \frac{1}{(\tau_{sugn2}^i)^r} \right)^{-\frac{1}{r}} ; i = \rho, u, e \quad (12)$$

asociados a ρ , ρu y ρe respectivamente. Los parámetros involucrados en (12) propuestos en [3, 4, 7] son:

$$\tau_{sugn1}^\rho = \tau_{sugn1}^u = \tau_{sugn1}^e = \left(\sum_{a=1}^{n_{en}} \left(c |j \cdot \nabla N_a| + |u^h \cdot \nabla N_a| \right) \right)^{-1} \quad (13)$$

$$\tau_{sugn2}^\rho = \tau_{sugn2}^u = \tau_{sugn2}^e = \frac{\Delta t}{2} \quad (14)$$

donde j es un vector unitario definido por:

$$j = \frac{\nabla \rho}{\|\nabla \rho\|} \quad (15)$$

donde N_a son las funciones de forma utilizadas (se adoptan funciones de interpolación lineales), c es la velocidad del sonido, y Δt es el paso de tiempo determinado por criterios de estabilidad del término convectivo. El parámetro r , denominado “ r – switch”, adopta generalmente el valor $r = 2$.

3.2. Algoritmo de captura de discontinuidades

Como se mencionó en la sección anterior, el método SUPG es ampliamente utilizado debido que los resultados obtenidos son precisos y libre de oscilaciones en gran parte del dominio computacional, salvo en regiones donde ocurren discontinuidades, presentando oscilaciones espúreas (overshooting y undershooting) localizadas en las regiones cercanas a las discontinuidades. Estas oscilaciones son de origen numérico, usualmente de pequeña magnitud pero inaceptables en muchas aplicaciones.

Varios términos que introducen difusión artificial en forma isotrópica o anisotrópica en las regiones cercanas a las discontinuidades han sido propuestos para ser introducidas en la formulación SUPG, los cuales al menos reducen las oscilaciones locales. Este procedimiento se denomina captura de discontinuidades o capturas de choque. Los algoritmos de captura de discontinuidades son utilizados para disminuir las oscilaciones numéricas producidas en zonas cercanas a las discontinuidades en la solución, las cuales en ocasiones se dispersan en todo el dominio de análisis. La idea principal del tratamiento numérico de ondas de choque o discontinuidades, es la introducción de un término de viscosidad artificial adicional en las ecuaciones de conservación. Hay varias técnicas para introducir términos representativos y adicionar disipación en el esquema numérico, los cuales involucran parámetros introducidos en ocasiones de forma *ad-hoc*. De los primeros métodos en utilizar técnicas de captura de discontinuidades en las ecuaciones de Euler, es el método de presión pseudo-viscosa introducido en [8].

El problema básico de todos estos métodos es encontrar la cantidad apropiada de difusión la cual provea las menores oscilaciones (difusión artificial no demasiado pequeña) con una precisión suficientemente elevada (difusión artificial no demasiado grande).

El término de captura de discontinuidades utilizado en este trabajo, es similar al desarrollado en [9] donde se adiciona viscosidad de manera anisotrópica utilizando expresiones de los residuos. El término de captura de discontinuidades es:

$$\mu_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \right) \quad (16)$$

donde μ_a es un coeficiente de difusión artificial que debe elegirse de manera adecuada. Surgen diferentes formas de obtener este parámetro de una manera adecuada, tal que el efecto del término adicional de difusión solo tenga efecto en la zona de discontinuidades sin introducir perturbaciones en el resto del dominio de análisis. La expresión utilizada para determinar el término de viscosidad adicional es:

$$\mu_a = \alpha_\mu h (|u| + c) S_e I \quad (17)$$

donde α_μ es un coeficiente adimensional. S_e es un parámetro denominado *pressure switch*, el cual se obtiene de promediar sobre el elemento en cuestión los valores nodales S_i obtenidos de la siguiente ecuación:

$$S_i = \frac{|\sum_e (p_i - p_k)|}{\sum_e |p_i - p_k|} \quad (18)$$

Puede verificarse de la ecuación anterior que $S_i = 1$ cuando la presión tiene un máximo (o mínimo) local en el nodo n_i , y $S_i = 0$ cuando la presión en el nodo es el promedio del valor de la presión en todos los nodos n_k adyacentes.

4. IMPLEMENTACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS

De las ecuaciones de la dinámica de fluidos en forma conservativa (7), considerando los términos asociados a la formulación de estabilidad (10) y captura de discontinuidades (16), se obtiene la siguiente ecuación resultado de la formulación adoptada:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - \tau A_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} - \vartheta \right) - \mu_a \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \right) = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, t) \quad (19)$$

Dada la ecuación (19) anterior, aplicando el método de residuos ponderados de Galerkin y debilitando la ecuación resultante, se obtiene la siguiente expresión:

$$\int_{\Omega} N^T \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} N^T A_i \frac{\partial U}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N^T}{\partial x_i} \tau A_i \left(A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} - \vartheta \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N^T}{\partial x_i} \mu_a \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \right) d\Omega = 0 \quad (20)$$

las matrices τ , μ_a , A_i y K_{ij} son constantes elementales evaluadas como promedio en el centroide del área elemental. N es una matriz conteniendo las funciones de forma adoptadas. Cabe aclarar que en la formulación, al no considerar términos fuentes, se simplifican notablemente las condiciones de borde del problema.

Se utiliza un esquema de discretización explícito, y con motivo de verificar tiempos de convergencia se adoptan diferentes métodos para evaluar el término temporal.

5. ESQUEMA DE DISCRETIZACIÓN TEMPORAL

De los métodos de discretización temporal en los esquemas explícitos depende la precisión y estabilidad de la solución del problema a resolver, por tal motivo se llevó a cabo la implementación de diferentes métodos para evaluar su comportamiento. Trabajar con esquemas explícitos permite una elección arbitraria del orden de precisión temporal, utilizando esta ventaja, se implementó el método de Euler explícito

o forward Euler, y un método de Runge-Kutta propuesto en [10], el cual permite variar el orden de aproximación adoptando los coeficientes de manera sistemática. Para evaluar el comportamiento temporal se analizan dos casos, una rampa simple presentada en figura 3 y el perfil NACA 0012 a $\alpha = 0^\circ$ presentado en la figura 7. Del análisis se obtienen valores de tiempo de CPU necesario, tal que se satisfaga el criterio de convergencia adoptado, basándose en el error del cálculo de la energía interna, se requiere un error de convergencia de 10^{-12} .

Los resultados obtenidos se presentan en las figuras 1 y 2 donde se grafica el orden de Runge-Kutta o forward Euler en abscisas y el tiempo de CPU en ordenadas.

Las condiciones de análisis impuestas son : $V = 1020,0 \frac{m}{s}$ ($M_\infty = 3$), $T_\infty = 288,3 K$, $\rho_\infty = 1,225 \frac{Kg}{m^3}$, $\gamma = 1,4$. Se realizaron simulaciones de Euler explícito y Runge-Kutta de orden 2, 3 y 4 obteniendo los resultados presentado en figura 1:

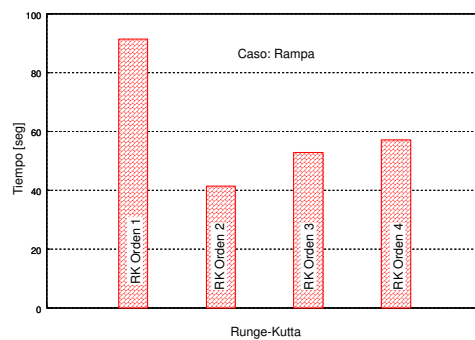


Figura 1: Tiempo de CPU empleado en alcanzar el criterio de convergencia de 10^{-12} basado en el error de cálculo de la energía interna. Caso de análisis - rampa simple.

Se puede observar de la figura 1 que el menor tiempo de CPU obtenido corresponde al método de Runge-Kutta de orden 2.

El la figura 2 se muestran los resultados obtenidos del análisis realizado para el caso del perfil NACA 0012. Se puede observar de los resultados mostrados, como es posible bajar el tiempo de CPU utilizando métodos de alto orden, con lo cual puede minimizarse el costo computacional en forma significativa.

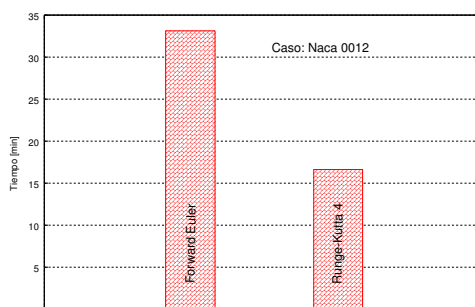


Figura 2: Tiempo de CPU para el caso del perfil NACA 0012, en función del método de integración temporal.

6. RESULTADOS

6.1. TUBO DE CHOQUE

El problema del tubo de choque, un problema básico de Riemann, ampliamente utilizado para comparar resultados obtenidos mediante esquemas numéricos aplicados a problemas en mecánica de fluidos compresibles. Este problema, caracterizado por variaciones unidimensionales, presenta solución analítica exacta. Un tubo de choque es básicamente un problema donde el dominio de análisis es dividido

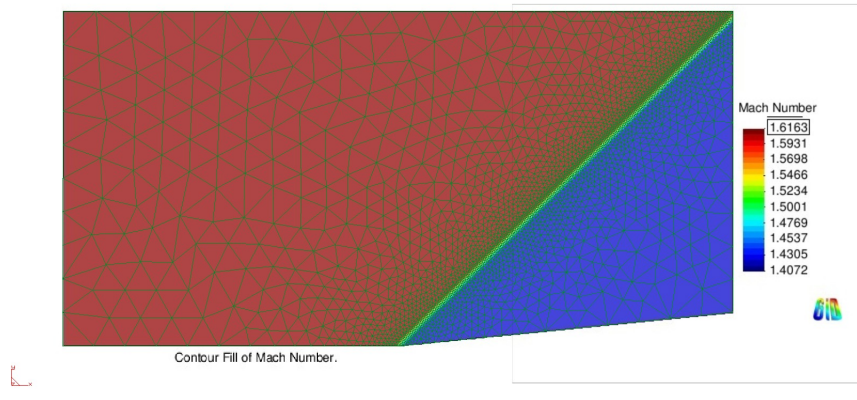


Figura 3: Geometría de rampa simple, malla utilizada en el análisis, y distribución de número de Mach encontrada.

mediante una membrana ideal, que hace de interface entre parámetros físicos y/o químicos diferentes. La solución del problema consiste en determinar la evolución de las condiciones del fluido en el dominio de análisis al quitar la membrana permitiendo interacción entre ambas partes del dominio.

Las condiciones de análisis a izquierda y derecha de la discontinuidad se presentan en el cuadro 1:

| ρ_l | u_l | p_l | ρ_r | u_r | p_r |
|----------|-------|-------|----------|-------|-------|
| 1.0 | 0.0 | 1.0 | 0.125 | 0.0 | 0.1 |

Cuadro 1: Condiciones de análisis a izquierda y derecha de la discontinuidad, “Sod test problem” [1].

La solución consiste en una expansión del lado izquierdo, una onda de choque a la derecha separadas por una discontinuidad de contacto. En el procedimiento de cálculo se realizaron 800 pasos de tiempo. Los resultados obtenidos se contrastan con la solución exacta en la figura 4.

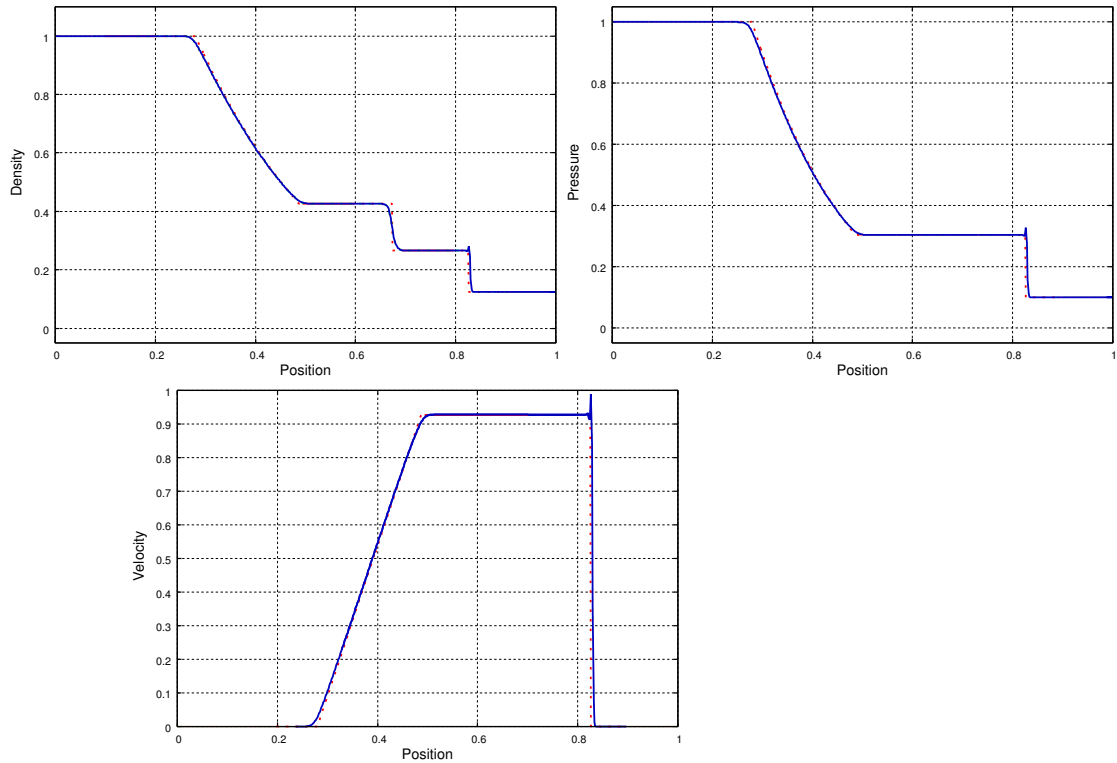


Figura 4: Comparación de resultados obtenidos con la solución exacta del problema de Riemann, condiciones iniciales presentadas en figura 1. Las gráficas muestran Densidad, Presión y Velocidad para 0,187 unidades de tiempo. Líneas de puntos corresponde a la solución analítica exacta, líneas llenas es la solución con CFD.

Como se puede observar en las gráficas anteriores, los resultados encontrados presentan una correlación aceptable respecto a la solución exacta, encontrando algunas incongruencias en las zonas donde ocurren discontinuidades. En estas zonas se observa undershoot y overshoot en el comportamiento de la solución, esto se atribuye al algoritmo de captura de discontinuidades el cual no es suficiente para atenuar las oscilaciones en las zonas de choque.

6.2. RAMPA DOBLE

El problema de la rampa doble, un caso de ondas de choque oblicuas, es de utilidad para comparar resultados, ya que el mismo tiene solución analítica exacta para el caso en dos dimensiones. Se resuelve el problema de la rampa doble con el motivo de evaluar la interacción entre ondas de choque y la discontinuidad tangencial generada por la intersección de estas. Las condiciones de análisis en este caso corresponden a $M_\infty = 3$, $T_\infty = 288,3 K$, $\rho_\infty = 1,225 \frac{Kg}{m^3}$. La geometría de la rampa doble se puede observar en la figura 5, donde la misma se compone de una rampa a 15° grados, y otra sucesiva a 30° respecto de la horizontal.

Se divide el dominio de análisis en tres zonas según se muestra en la figura 5, con motivo de presentar los resultados con mayor claridad. Los resultados obtenidos, comparados con la solución exacta se muestran en el cuadro 2 a continuación:

| M_1 | β [°] | P_2 [$\frac{Kg}{m^2}$] | T_2 [K] | ρ [$\frac{Kg}{m^3}$] | M_2 | Método | |
|-------|-------------|----------------------------|-----------|-----------------------------|-------|--------|--------|
| 3 | 32.25 | 2.858 | 400 | 2.49 | 2.25 | Exacta | Zona 1 |
| 3 | 32.5 | 2.856 | 401 | 2.48 | 2.24 | CFD | |
| 2.25 | 40.42 | 6.621 | 517.2 | 4.46 | 1.67 | Exacta | Zona 2 |
| 2.24 | 40.2 | 6.645 | 519.2 | 4.46 | 1.66 | CFD | |
| 3 | 52 | 6.439 | 578.5 | 3.88 | 1.41 | Exacta | Zona 3 |
| 3 | 53.1 | 6.548 | 579.5 | 3.93 | 1.4 | CFD | |

Cuadro 2: Comparativa de resultados obtenidos con CFD y las soluciones analíticas exactas del problema de rampa doble.

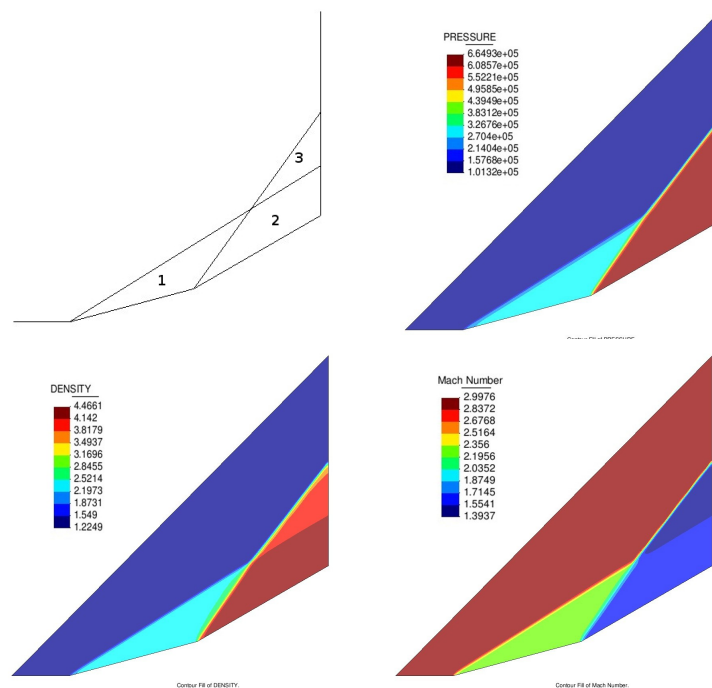


Figura 5: Resultados obtenidos con el esquema propuesto para las condiciones $M_\infty = 3$, $T_\infty = 288,3K$, $\rho_\infty = 1,225 \frac{Kg}{m^3}$, se muestran valores de densidad, presión y número de Mach en el dominio de análisis. El esquema superior izquierdo numera las zonas a las que se hace referencia en la tabla 2.

Se puede observar de la figura 5, las gráficas que muestran distribución de densidad y número de Mach en el dominio, presentan una línea de discontinuidad entre las zonas 2 y 3; esta discontinuidad, denominada de contacto, presenta una discontinuidad de velocidad tangencial, densidad y número de Mach, y en consecuencia de la temperatura, respecto al límite que divide las dos zonas consideradas.

6.3. CILINDRO A MACH 36

Este ejemplo, tiene como propósito mostrar la aplicación a flujo hipersónico del esquema en elementos finitos propuesto, con este problema ejemplo se evalúa un caso a elevados números de Mach pudiendo verificar el comportamiento del algoritmo de estabilización en estas condiciones. En los casos analizados no se consideran efectos de gas real, adoptando constante la relación de calores específicos γ y en condiciones de atmósfera estandar.

Los resultados presentados se obtuvieron con 20000 pasos de tiempo y las condiciones de análisis impuestas son: $V = 12250,0 \frac{m}{s}$ ($M_\infty = 36$), $T_\infty = 288,3 K$, $\rho_\infty = 1,225 \frac{Kg}{m^3}$, $\gamma = 1,4$.

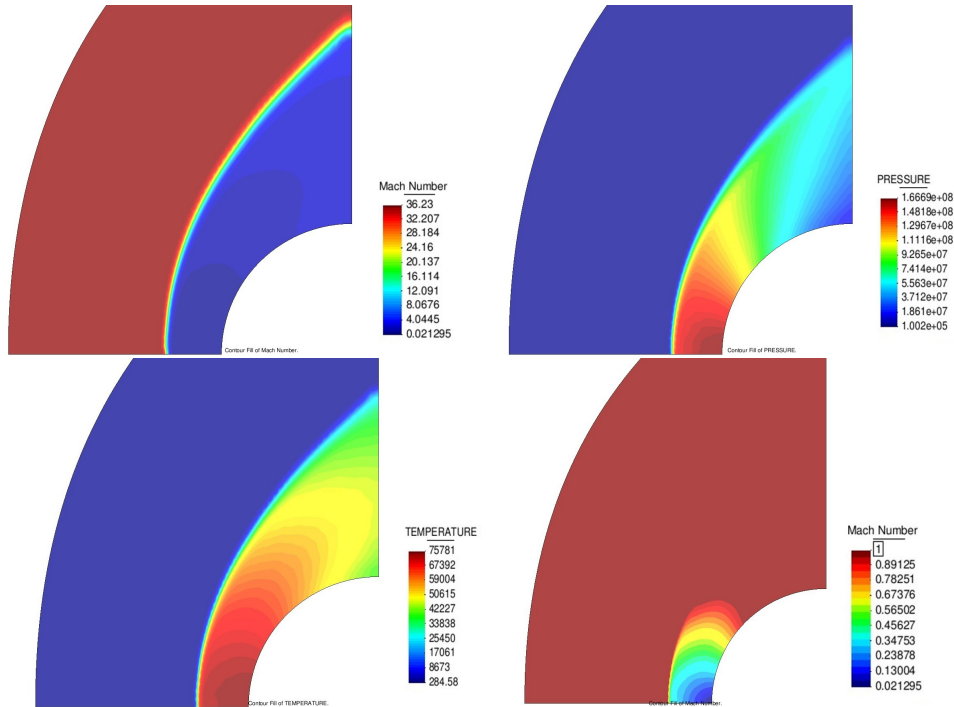


Figura 6: Resultados obtenidos con el esquema propuesto para las condiciones $V_x = 12250,0 \frac{m}{s}$ ($M_\infty = 36$), $T_\infty = 288,3 K$, $\rho_\infty = 1,225 \frac{Kg}{m^3}$, $\gamma = 1,4$. Se muestran resultados de densidad, temperatura y numero de Mach, junto con un detalle de la zona correspondiente a regimen de flujo subsónico.

En la figura 6 se observa, debido a la forma roma del cuerpo y las condiciones de análisis, la onda de choque se separa del cuerpo, dando origen a zonas con regimen de flujo subsónico y supersónico.

6.4. PERFIL NACA 0012 A $M=0.85$.

El perfil NACA 0012 es uno de los perfiles mas estudiados y analizados, ya sea en ensayos experimentales en túnel de viento así como en aplicaciones en problemas de mecánica computacional. Se realiza el análisis del perfil a $\alpha = 0^\circ$ de ángulo de ataque y a $M_\infty = 0,85$. Al tratarse de un caso transónico, deben imponerse también condiciones de borde a la salida del flujo.

Se muestran en la figura 7 los resultados obtenidos de densidad, presión y número de Mach, también se muestra una gráfica del coeficiente de presiones sobre el perfil.

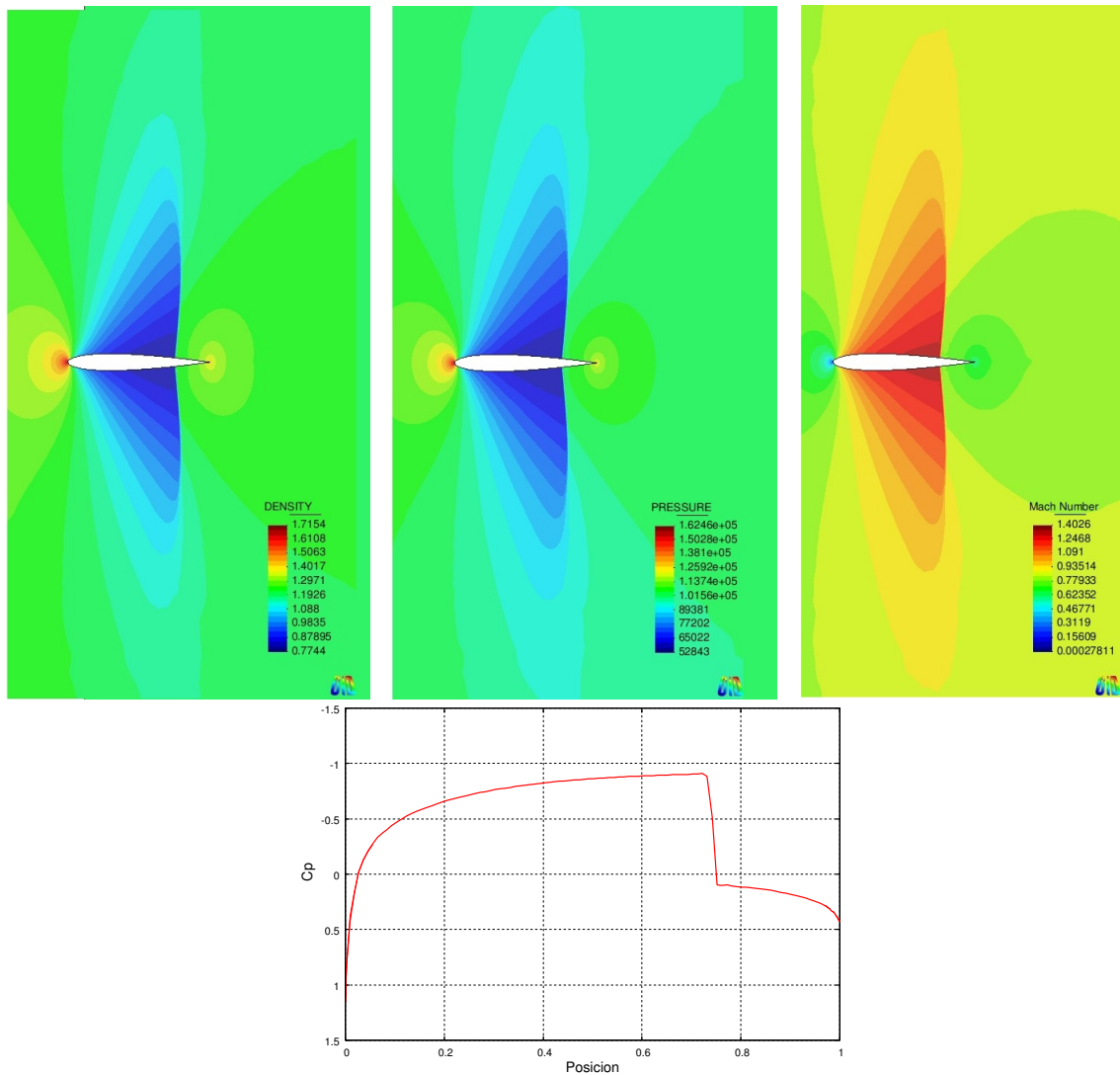


Figura 7: Resultados obtenidos con el esquema propuesto para las condiciones $M_\infty = 0,85$. Se presentan distribución de densidad, presiones, número de Mach, y distribución de coeficientes de presiones sobre el perfil NACA 0012 a $\alpha = 0^\circ$.

7. CONCLUSIONES

Como puede apreciarse en la sección anterior, los resultados obtenidos utilizando el esquema en elementos finitos propuesto son aceptables respecto a los resultados de soluciones analíticas exactas como lo son el caso del tubo de choque y el de la rampa doble. Entre las posibles mejoras futuras a implementar en el esquema, una de ellas es trabajar sobre el algoritmo de captura de discontinuidades, esto debido a que las soluciones obtenidas en las zonas donde ocurren discontinuidades presentan pequeñas oscilaciones o inestabilidades locales.

En lo que respecta a la discretización temporal, la implementación de esquemas temporales en los cuales pueda variarse el orden de precisión, es de gran utilidad práctica para resolver problemas con una precisión aceptable disminuyendo el costo computacional respecto a método de orden inferior. De los métodos evaluados, el de Runge-Kutta de orden 4 presenta el mejor comportamiento en cuanto a costo computacional o tiempo de CPU requerido.

8. AGRADECIMIENTOS

Se agradecen los aportes del Ministerio de Defensa quién financia el proyecto “Desarrollo de un código de flujo compresible mediante el método de elementos finitos” en el marco de los proyectos de investigación y desarrollo para la defensa (PIDDEF).

REFERENCIAS

- [1] Toro E. F., *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*, 2nd Ed, Springer, Berlin, 1999.
- [2] Tezduyar T. E., Hughes T. J. R., *Development of time-accurate finite element techniques for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations*, NASA Tech. Rep. NASA-CR-204772, NASA, 1982, disponible desde: <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19970023187_1997034954.pdf>.
- [3] Tezduyar T. E., *Determination of the stabilization and shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows*, ECCOMAS 2004.
- [4] Tezduyar T. E., Masayoshi S., *Stabilization and shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows*, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 (2006) 1621-1632, Elsevier, 2005.
- [5] Soto O., Löhner R., Cebal J., Codina R., *A time-accurate implicit-monolithic finite element scheme for incompressible flow problems*, ECCOMAS 2001.
- [6] Tezduyar T. E., Hughes T.J.R., *Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 45 (1984) 217-284, North-Holland, 1984.
- [7] Tezduyar T. E., Sathe S., *Stabilization parameters in SUPG and PSPG formulations*, Journal of Comp. Appl. Mech. Eng., Vol. 4, N°1 (2003), pp. 71-88.
- [8] Neumann J., Richtmyer R.D., *A method for the numerical calculations of hydro-dynamical shocks*, J. Math. Phys., 21, 232-237 (1950).
- [9] Codina R., *A discontinuity capturing crosswind dissipation for the finite element solution of the convection-diffusion equation*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 110, 325-342 (1993).
- [10] Löhner R., *Applied computational fluid dynamics techniques: An introduction based on finite element method*, 2nd Ed., John Wiley and Sons, 2008.