



## 4<sup>to</sup> Congreso Argentino de Ingeniería Aeronáutica



# ESTUDIO DE LA RECOLECCIÓN CORRIENTE EN UNA SONDA DE LANGMUIR CILÍNDRICA MEDIANTE UN CÓDIGO DE VLASOV

D. Lorenzon <sup>a</sup>, S. Elaskar <sup>a,b</sup>, G. Sanchez-Arriaga <sup>c</sup>

<sup>a</sup> Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT), UNC- CONICET, Av. Velez Sarsfield 1611, Córdoba, Argentina. <http://www.inv.idit.efn.uncor.edu/>

<sup>b</sup> Departamento de Aeronáutica, FCEFyN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Velez Sarsfield 1611, Córdoba, Argentina. <http://www.portal.efn.uncor.edu/>

<sup>c</sup> Universidad Carlos III, Madrid, España. <http://www.uc3m.es/Inicio>

**Palabras claves:** sonda de Langmuir, space tether, plasma, simulación numérica

### Resumen

En este trabajo se presenta una adaptación del programa Kilaps desarrollado en la Universidad Politécnica de Madrid\*. El código simula la dinámica de plasmas dependiente del tiempo en las inmediaciones de una sonda de Langmuir cilíndrica. Las sondas de Langmuir son utilizadas para caracterizar plasmas de laboratorio y su correcto modelado teórico es fundamental para correlacionar las medidas de la sonda con las propiedades del plasma. Dentro de las aplicaciones en ingeniería aeroespacial, los avances en teoría de sondas de Langmuir son utilizados en amarras espaciales electrodinámicas (*space tethers*) y en propulsores por plasma.

El código implementa un algoritmo numérico de tipo Vlasov directo o Euleriano para propagar en el tiempo la ecuación de Vlasov y utiliza un esquema basado en diferencias finitas para discretizar las funciones de distribución de electrones e iones en el espacio físico y en el espacio de velocidades. La integración en el tiempo se lleva a cabo con un método de Runge-Kutta explícito.

Se presentan diagramas de la variación de las propiedades del plasma en las inmediaciones de la sonda y de su evolución en el tiempo. Además, se discuten posibles líneas de acción para mejorar la exactitud de los resultados y extender la aplicabilidad del programa.

\* G. Sánchez-Arriaga, "A direct Vlasov code to study the non-stationary current collection by a cylindrical Langmuir probe", Physics of Plasmas, 013504, 2013.

## 1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la recolección de corriente en objetos conductores inmersos en un plasma es de fundamental importancia para muchas aplicaciones como la caracterización de plasmas de laboratorio [1], el diseño de amarras espaciales electrodinámicas [2] o la implantación de iones fuente [3]. También es relevante para el problema de la carga de vehículos espaciales, el cual ha impulsado el desarrollo de códigos por parte de las principales agencias espaciales a nivel mundial [4, 5]. Estos códigos usan métodos de partículas en celdas (PIC) para resolver el sistema de Vlasov-Poisson y encontrar soluciones estacionarias al problema de la carga. Aquí se implementa un código de Vlasov Euleriano para encontrar soluciones inestacionarias al sistema de Vlasov-Poisson en un dominio con geometría cilíndrica.

Los primeros trabajos sobre la recolección de corriente en sondas de Langmuir asumían condiciones estacionarias [6, 7, 8] y, como consecuencia de esto, despreciaban la población de partículas atrapadas en trayectorias cerradas. El cómputo de las partículas atrapadas requiere la solución de la ecuación de Vlasov no estacionaria. En el código presentado aquí, se considera que inicialmente el plasma y la sonda están en equilibrio, entonces el potencial de la sonda se cambia repentinamente de cero a un valor finito. Bajo estas condiciones, se produce un sobrepaso de la corriente de iones por encima de la llamada corriente de movimiento orbital limitado (OML), el cual se explica diciendo que la aparición repentina del potencial eléctrico atrapa los iones de baja cantidad de movimiento angular en las cercanías de la sonda [9]. Por esta razón, la densidad del plasma puede exceder localmente a la densidad del plasma sin perturbar lo que remarca la importancia de tener en cuenta el transitorio. La recolección de corriente no estacionaria ya ha sido estudiada usando tanto códigos tipo PIC [10, 11, 12], como códigos de Vlasov Eulerianos usando coordenadas cartesianas [13] y cilíndricas [14].

El programa Kilaps desarrollado en la Universidad Politécnica de Madrid representa un código original que en lugar de usar métodos tipo PIC, implementa un código de Vlasov directo para resolver el sistema Vlasov-Poisson no estacionario en una geometría cilíndrica [15, 16]. La diferencia entre ambas metodologías es que un código tipo PIC discretiza la ecuación de Vlasov usando macropartículas, cada una de las cuales representa numerosas partículas reales, y sus trayectorias son seguidas usando un método de características. En contraste, un código de Vlasov directo discretiza la función de distribución en el espacio físico y de velocidades. Los códigos de Vlasov directos tienen significativas ventajas por sobre los PIC. Por ejemplo, un código tipo PIC no da resultados precisos cuando el número de partículas por celda es pequeño, y además, introduce un ruido numérico en las simulaciones que crece en la medida que aumenta  $1/\sqrt{N}$  (donde  $N$  es el número de partículas). Este ruido fue puesto en evidencia en las referencias [10] y [12]. Por su parte, los códigos de tipo Vlasov directo requieren más recursos computacionales en términos de memoria y potencia de cálculo pero están libres de los problemas mencionados.

El presente trabajo es solamente la primera instancia de un proceso de adaptación, optimización y extensión del programa Kilaps. Hasta ahora el código se ha reorganizado y adaptado para ser compilado y ejecutado sobre la plataforma Windows, para lo cual fue reescrito en la IDE Microsoft® Visual Studio 2015 y compilado con el compilador Intel® Fortran Compiler 16.0. El principal objetivo a futuro será la incorporación al programa de las ecuaciones electrodinámicas para resolver el sistema Vlasov-Maxwell en lugar del sistema Vlasov-Poisson.

El trabajo aquí presentado se organiza como sigue. En la Sección II se introducen el modelo matemático y el algoritmo numérico para resolver las ecuaciones. También se describe la adaptación realizada del programa Kilaps para la Universidad Nacional de Córdoba. La Sección III muestra algunos resultados obtenidos y las conclusiones se exponen en la Sección IV.

## 2. EL MODELO

### 2.1. Ecuaciones relevantes

Se considera un plasma Maxwelliano ideal en reposo, no colisional y no magnetizado, compuesto por electrones e iones con temperaturas  $T_e$  y  $T_i$ , respectivamente, y una densidad sin perturbar  $N_0$ . Inicialmente, el plasma está en equilibrio con una sonda cilíndrica perfectamente absorbente de radio  $R$  y potencial nulo. Un instante de tiempo después, en  $t = 0^+$ , la sonda se polariza súbitamente a un potencial finito  $\phi_p$  ante lo cual reaccionan los iones y electrones hasta alcanzar un nuevo estado estacionario.

Con el propósito de estudiar el transitorio, se introducen las siguientes variables adimensionales

$$\omega_{pe} t \rightarrow t, \quad \frac{r}{\lambda_{De}} \rightarrow r, \quad \frac{v}{\sqrt{k_B T_e / m_e}} \rightarrow v,$$

$$\frac{e\varphi}{k_B T_e} \rightarrow \varphi, \quad \frac{k_B T_e f_\alpha}{N_0 m_e} \rightarrow f_\alpha, \quad \frac{N_\alpha}{N_0} \rightarrow N_\alpha \quad (1)$$

y parámetros adimensionales

$$\mu_\alpha = \frac{m_\alpha}{m_e}, \quad \epsilon_\alpha = \frac{q_\alpha}{e}, \quad \delta_\alpha = \frac{T_\alpha}{T_e}, \quad \rho = \frac{R}{\lambda_{De}} \quad (2)$$

donde  $\alpha = i, e$  denota iones y electrones, respectivamente.

Bajo las suposiciones de que el plasma es no colisional ( $df_\alpha/dt = 0$ ), no relativista ( $v \ll c$ ), y de que no hay efectos magnéticos ( $v \times B \ll E$  y  $\partial B/\partial t \cong 0$ ), el sistema de Vlasov-Poisson es

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} + \frac{dv}{dt} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{e}{\epsilon_0} (N_i - N_e) \quad (4)$$

Si se usa un sistema de coordenadas cilíndricas con origen en el centro de la sonda y se consideran dos dimensiones en el espacio físico ( $r, \theta$ ) más dos dimensiones en el espacio de velocidades ( $v_r, v_\theta$ ), el sistema se escribe

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} + \left( \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_r} - \frac{1}{r} \left( v_r v_\theta + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\theta} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{e}{\epsilon_0} (N_e - N_i) \quad (6)$$

Si, además, se supone que la función de distribución y el potencial tienen simetría cilíndrica respecto del eje de la sonda, las ecuaciones adimensionales se reducen a

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \left( \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{\epsilon_\alpha}{\mu_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\theta}{r} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_\theta} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = N_e - N_i \quad (8)$$

donde las densidades de carga  $N_\alpha$  se obtienen por integración de las funciones de distribución en el espacio de velocidades

$$N_\alpha(r, t) = \iint f_\alpha(r, v_r, v_\theta, t) dv_r dv_\theta \quad (9)$$

Este sistema de ecuaciones (Ecs. 7-9) debe integrarse con las siguientes condiciones de contorno

$$f_\alpha(\rho, v_r > 0, v_\theta, t) = 0 \quad (10)$$

$$\varphi(\rho, t) = \varphi_p \quad (11)$$

$$f_\alpha(r \rightarrow \infty, v_r, v_\theta, t) \rightarrow f_{0\alpha} = \frac{\mu_\alpha}{2\pi\delta_\alpha} e^{-\frac{\mu_\alpha}{2\delta_\alpha}(v_r^2 + v_\theta^2)} \quad (12)$$

$$\varphi(r \rightarrow \infty, t) \rightarrow 0 \quad (13)$$

donde la función de distribución se anula sobre la superficie de la sonda si la velocidad radial es positiva ya que la sonda no emite partículas.

Para la situación inicial, se usa la siguiente función de distribución

$$f_\alpha(r, v_r, v_\theta, 0^-) = f_{0\alpha} \quad \text{si} \quad \left| \arctan\left(\frac{v_\theta}{v_r}\right) \right| \geq \arcsin\left(\frac{\rho}{r}\right) \quad (14)$$

$$f_\alpha(r, v_r, v_\theta, 0^-) = 0 \quad \text{si} \quad \left| \arctan\left(\frac{v_\theta}{v_r}\right) \right| < \arcsin\left(\frac{\rho}{r}\right) \quad (15)$$

Dado que la sonda no emite partículas y que la función de distribución se conserva a lo largo de las órbitas de las partículas, se tiene que  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0$  si la órbita de una partícula seguida hacia atrás en el tiempo desemboca en la sonda, si esto no ocurre, la función de distribución es una de Maxwell-Boltzmann. Por esta razón, aunque inicialmente la sonda no está polarizada y el potencial es cero en todo lugar, la presencia de la sonda modifica la función de distribución Maxwelliana del plasma sin perturbar. Para cada valor de  $r$ , la función de distribución es una de Maxwell en todo punto del espacio de fases excepto en un cono en el plano  $v_r - v_\theta$ . El ángulo de este cono depende del valor de  $r$ , variando desde  $\pi$  cuando  $r = \rho$  hasta 0 cuando  $r \rightarrow \infty$ .

La primera vez que se aplicaron las condiciones de contorno dadas por las ecuaciones (14) y (15) para simulaciones numéricas de la recolección de corriente en sondas cilíndricas fue en el trabajo de Sánchez-Arriaga, (2013) [15]. Se destaca que inicializar el código con una distribución Maxwelliana simple genera una inconsistencia en la condición de contorno en  $r = \rho$  (Ec. 10). Esta inconsistencia no es importante en las simulaciones tipo PIC pero en los códigos de Vlasov podría introducir fuertes gradientes en las cercanías de la sonda los cuales no tienen ningún sentido físico.

## 2.2. Implementación numérica

Siguiendo con la línea de desarrollo del programa Kilaps [15, 16], el código presentado discretiza el espacio  $r - v_r - v_\theta$  con mallas que pueden ser diferentes para los iones y electrones. El dominio espacial infinito  $r \in [\rho, \infty)$  es limitado a un radio  $r_{max}$ , y el intervalo  $[\rho, r_{max}]$  es discretizado con  $N_r$  puntos que pueden no estar distribuidos uniformemente. Respecto del espacio de velocidades, los dominios infinitos son limitados a intervalos finitos  $v_r \in [-v_{rmax}, v_{rmax}]$  y  $v_\theta \in [-v_{\theta max}, v_{\theta max}]$ . Estos intervalos se discretizan con  $N_{v_r}$  y  $N_{v_\theta}$  puntos, respectivamente, igualmente espaciados. Como consecuencia de la diferencia entre la masa de los iones y la de los electrones, los valores de  $v_{rmax}$  y de  $v_{\theta max}$  se toman diferentes para cada especie. Por lo tanto, los iones y electrones tienen mallas distintas en el espacio de velocidades pero comparten los mismos nodos en la dirección radial. El número total de nodos, tanto para los iones como para los electrones, está dado por

$$N = N_{v_\theta} \left[ \frac{N_{v_r} + 1}{2} + N_{v_r} (N_r - 1) \right] = N_{v_\theta} N_{v_r} N_r - \frac{N_{v_\theta} (N_{v_r} - 1)}{2} \quad (16)$$

En cada uno de los  $N$  puntos de la malla dado por las coordenadas  $(r_i, v_{rj}, v_{\theta k})$ , está definido el valor de la función de distribución  $f^\alpha_{i,j,k}(t)$ , de la especie  $\alpha$ .

A continuación, se emplean fórmulas de diferencias finitas para transformar la ecuación de Vlasov en un conjunto de  $2N$  ecuaciones diferenciales ordinarias con las incógnitas  $f^\alpha_{i,j,k}(t)$ . Este proceso de discretización debe preservar el carácter hiperbólico de la ecuación de Vlasov por lo que se requiere una correcta implementación de los esquemas hacia atrás y hacia adelante.

En los contornos del dominio numérico, las fórmulas de diferencias finitas implican conocer el valor de la función de distribución fuera de la malla, por ello, son usadas las condiciones de contorno (Ecs. 10 y 12). El código asume que los valores de  $v_{rmax}$  y de  $v_{\theta max}$  son lo suficientemente altos como para despreciar la función de distribución si  $v_r$  o  $v_\theta$  no caen dentro de los intervalos considerados. Sobre la superficie de la sonda  $r = \rho$ , no es necesario aplicar ninguna condición de contorno para  $v_r < 0$  porque las fórmulas de diferencias finitas hacia adelante no precisan ningún valor fuera del dominio. Cabe mencionar que si  $r = \rho$  y  $v_r > 0$ , no se calcula la derivada de la función de distribución en la dirección radial dado que la sonda se considera perfectamente absorbente (Ec. 10).

La aplicación de las fórmulas de diferencias finitas en el otro contorno espacial  $r = r_{max}$  cuando  $v_r < 0$  es un poco más complicada a causa de que necesita valores de la función de distribución fuera del dominio computacional. En cualquier posición  $r > r_{max}$ , el algoritmo define a la función de distribución de la misma forma que las ecuaciones (14 y 15), lo cual tiende a ser exacto (Ec. 12) en la medida que  $r_{max}$  tiende a infinito. No obstante, como  $r_{max}$  es finito, el potencial tiene un valor residual en  $r_{max}$  que hace que la función de distribución se distinga de una Maxwelliana.

Por conveniencia, todas las incógnitas  $f^\alpha_{i,j,k}(t)$  se disponen en un único arreglo unidimensional  $\mathbf{F}_\alpha$  de dimensión  $N$ . Luego, la ecuación de Vlasov para los electrones se escribe

$$\frac{d\mathbf{F}^e}{dt} = \left[ \mathbf{M}^e_L + \frac{\epsilon_e}{\mu_e} \mathbf{M}^e_{NL}(\mathbf{F}^e, \mathbf{F}^i) \right] \mathbf{F}^e + \mathbf{C}^e \quad (17)$$

La expresión para los iones es análoga a la anterior. El sistema de  $2N$  ecuaciones diferenciales ordinarias, compuesto por las Ecs. (17) y sus análogas para los iones, se integra a través de un algoritmo tipo Runge-Kutta explícito de tercer orden donde el incremento de tiempo  $\Delta t$  está condicionado por cuestiones de estabilidad. Esto es problemático cuando el radio de la sonda es pequeño ya que el campo eléctrico es grande en las proximidades de la sonda y los métodos explícitos requieren  $\Delta t$  muy pequeños.

### 2.3. Adaptación del código

Teniendo en mente el objetivo futuro de extender el programa Kilaps para resolver la ecuación de Vlasov junto con las ecuaciones de Maxwell, el código ha sido adaptado para ser compilado en la plataforma Windows® con el compilador Intel® Fortran Compiler. La elección del compilador se basa en que éste es reconocido como uno de los mejores compiladores de Fortran por generar ejecutables cuyo desempeño es superior a los generados por sus competidores (<http://www.fortran.uk/fortran-compiler-comparisons-2015/>; <https://software.intel.com/en-us/fortran-compilers/details>).

Se desea que los tiempos de ejecución del programa sean los menores posibles por lo que se ha emprendido un proceso de optimización que incluye opciones de compilación, cambios en el código, vectorización y paralelismo con MPI más OpenMP. Este proceso se ha comenzado compilando los ejecutables con un nivel de optimización *O2* para favorecer la velocidad por sobre el número de instrucciones, forzando la expansión *inline* de funciones dentro de otras para disminuir la cantidad de llamadas, habilitando optimizaciones inter-procedurales y usando modelos rápidos para las operaciones de punto flotante que no respetan el estándar IEEE 754. Además, se especificó que se dispone de un procesador Intel® con conjuntos de instrucciones *AVX* para que el compilador vectorice automáticamente la mayor parte posible del programa.

El código se encuentra paralelizado usando el estándar MPI (Message Passing Interface) y descomponiendo el dominio espacial de manera que cada hilo resuelva un subdominio del problema. En todas las simulaciones de prueba realizadas, la velocidad del programa aumenta de manera proporcional al número de unidades de procesamiento empleadas logrando una eficiencia del paralelismo superior al 90%. Por la forma en que está implementada la interfaz MPI, el programa sólo puede escalarse a cualquier número par de procesadores. Si bien la eficiencia calculada es alta, se desconoce el desempeño del programa sin paralelismo de hilos y se planea modificar la implementación de MPI para que el programa sea paralelizable a un número cualquiera de procesos. Por otra parte, se desea evaluar la performance del código reemplazando MPI por OpenMP, o implementando OpenMP en las secciones secuenciales del programa.

### 3. RESULTADOS

Los parámetros físicos usados para todas las simulaciones presentadas son

$$\frac{e\phi_p}{k_B T_e} = 15, \quad \frac{T_i}{T_e} = 1, \quad \frac{m_i}{m_e} = 1836, \quad \frac{R}{\lambda_{De}} = 0.5 \quad (18)$$

Por su parte, los límites del dominio en el espacio físico y de velocidades son

$$r_{max} = 100 \lambda_{De}, \quad v_{r_{max}} = v_{\theta_{max}} = 10 \sqrt{k_B T_e / m_e} \text{ (electrones)} \\ v_{r_{max}} = v_{\theta_{max}} = 10 \sqrt{k_B T_e / m_e} \sqrt{m_e / m_i} \text{ (iones)} \quad (19)$$

Una simulación de tiempo adimensional  $\omega_{pe} t = 100$  fue realizada con tres mallas de distinta resolución para analizar la dependencia de la solución de la discretización y para definir una resolución adecuada para simular tiempos de hasta  $\omega_{pe} t = 2000$ . Los números de nodos de las tres mallas, llamadas *gruesa*, *media* y *fin*, están dados por

$$\begin{aligned} \textit{gruesa:} \quad N_r &= 121, \quad N_{v_r} = N_{v_\theta} = 51, \quad N_{Hres} = 32 \\ \textit{media:} \quad N_r &= 185, \quad N_{v_r} = N_{v_\theta} = 75, \quad N_{Hres} = 48 \\ \textit{fin:} \quad N_r &= 281, \quad N_{v_r} = N_{v_\theta} = 99, \quad N_{Hres} = 96 \end{aligned} \quad (20)$$

La malla espacial no es uniforme sino que está refinada con  $N_{Hres}$  nodos en el intervalo desde la sonda hasta  $r = 10 \lambda_{De}$  para capturar correctamente la dinámica del plasma cerca de la pared.

La Figura 1 compara las distribuciones de electrones e iones obtenidas con las tres mallas para los instantes de tiempo  $\omega_{pe} t = 5$  y 100. Se observa que al refinar sucesivamente la malla, las curvas conservan la misma tendencia pero se desplazan hacia arriba y no queda claro si la solución obtenida con la malla *fin* está próxima a la convergencia.

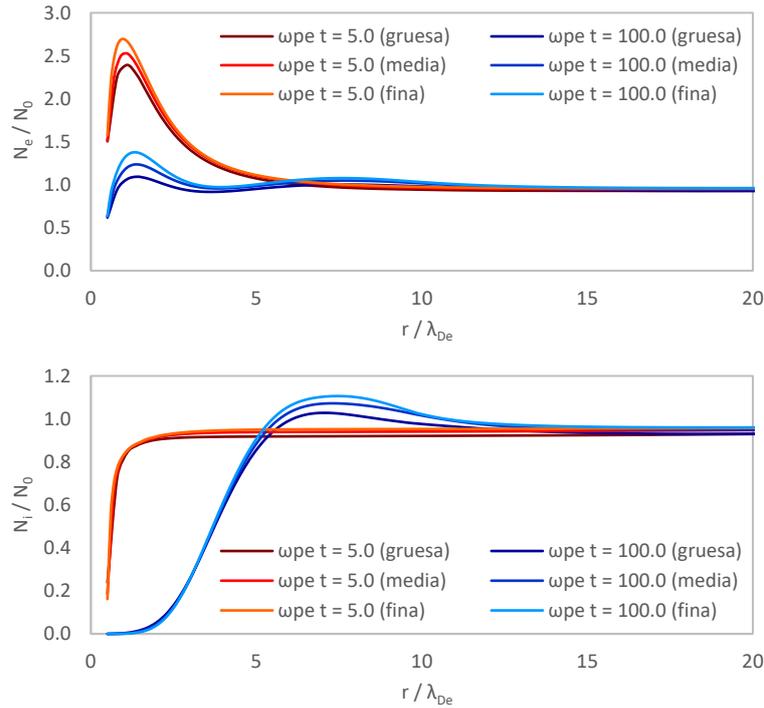


Figura 1: Distribuciones de electrones (arriba) e iones (abajo) obtenidas con mallas de distinta resolución en  $\omega_{pe}t = 5$  y  $100$ .

La Figura 2 muestra la evolución temporal de la distribución de densidad de electrones en el intervalo de tiempo  $\omega_{pe}t = 0 - 100$  lograda con la malla *fina*, y detalla la variación espacial para algunos instantes de tiempo específicos. La evolución espacio-temporal de la densidad de iones puede verse en la Figura 3. Se aprecia que al principio de la simulación los electrones son atraídos hacia la sonda produciendo un pico de densidad, aproximadamente de  $N_e/N_0 = 2.70$  en  $\omega_{pe}t = 5$ , como respuesta al abrupto cambio en el potencial de la sonda. La densidad de iones, a su vez, exhibe un máximo por sobre la densidad de fondo durante el transitorio aproximadamente de  $N_i/N_0 = 1.17$  en  $\omega_{pe}t = 55$  (ver Figura 3, curvas  $\omega_{pe}t = 20 - 100$ ).

Empleando una malla de resolución similar a la denominada *media* ( $N_r = 185, N_v = 65$ ), se realizó una simulación de tiempo adimensional  $\omega_{pe}t = 2000$ . La función de distribución de electrones alcanzada al final de la simulación es representada en el espacio de velocidades en la Figura 4, en las posiciones  $r = 0.5 \lambda_{De}$  (pared de la sonda),  $r = 1.39 \lambda_{De}$  (donde la densidad de electrones es máxima), en  $r = 10 \lambda_{De}$  y en  $r = 100 \lambda_{De}$  (lejos de la sonda). Se observa que en  $r = \rho$  no existen partículas con velocidad radial positiva lo cual es consistente con la suposición de una sonda perfectamente absorbente (condición de contorno Ec. 10). En la posición radial donde la densidad de electrones es máxima, la función de distribución adopta valores finitos para velocidades radiales positivas. En el límite exterior del dominio la función de distribución se aproxima a una de Maxwell-Boltzmann pero manteniéndose nula si  $v_\theta = 0$  y  $v_r > 0$ , debido a la presencia de la sonda. Entre  $r = 10 \lambda_{De}$  y  $r = r_{max}$  aparecen pequeñas fluctuaciones espurias en la función de distribución electrónica producidas por la combinación de la resolución de la malla con la transición discontinua dada por las ecuaciones (14 y 15). En las simulaciones de prueba realizadas con mallas de diferente densidad se apreció que refinar la malla no reduce significativamente la amplitud ni la extensión de dichas fluctuaciones.

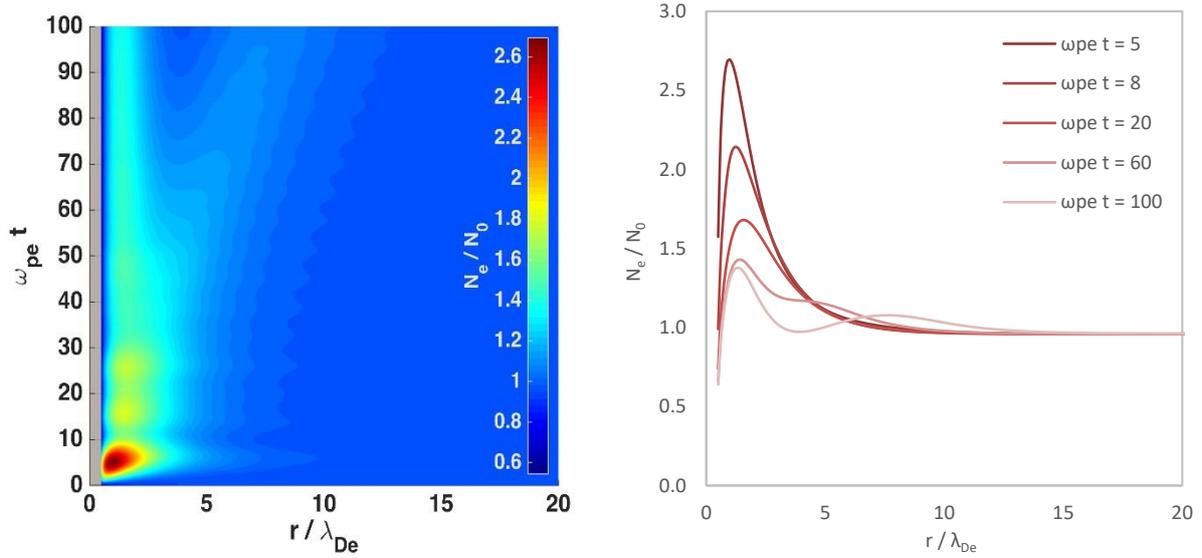


Figura 2: Evolución espacio-temporal de la densidad de electrones ( $N_r = 281, N_v = 99$ ).

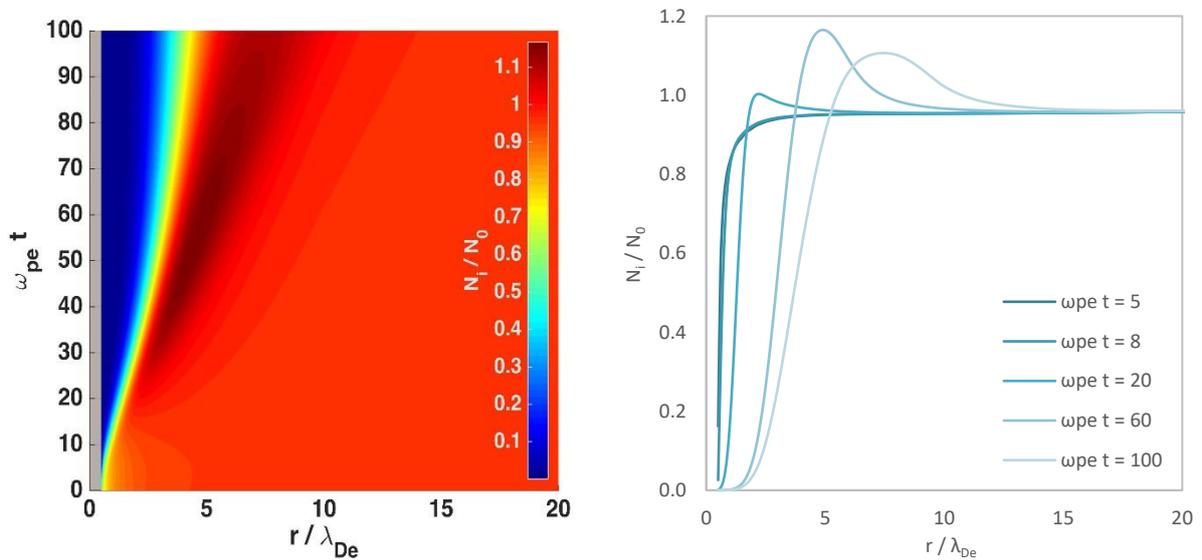


Figura 3: Evolución espacio-temporal de la densidad de iones ( $N_r = 281, N_v = 99$ ).

Las distribuciones de densidad de electrones e iones alcanzadas al final de la simulación ( $\omega_{pe} t = 2000$ ) se representan en la Figura 5. Finalmente, la Figura 6 muestra la evolución temporal de la densidad de electrones sobre la pared de la sonda y de la densidad de electrones máxima. La densidad electrónica normalizada sobre la sonda ( $N_e^{r=\rho}/N_0$ ) se incrementa inicialmente por encima de la densidad de fondo (aproximadamente hasta  $N_e^{r=\rho} = 1.68 N_0$  en  $\omega_{pe} t = 3.5$ ) y luego decae aproximándose progresivamente a un valor ligeramente por encima de  $0.55 N_0$ . Por su parte, la densidad electrónica máxima normalizada también exhibe un sobrepaso de aproximadamente  $2.70 N_0$  y se aproxima a  $N_0$  al avanzar en el tiempo.

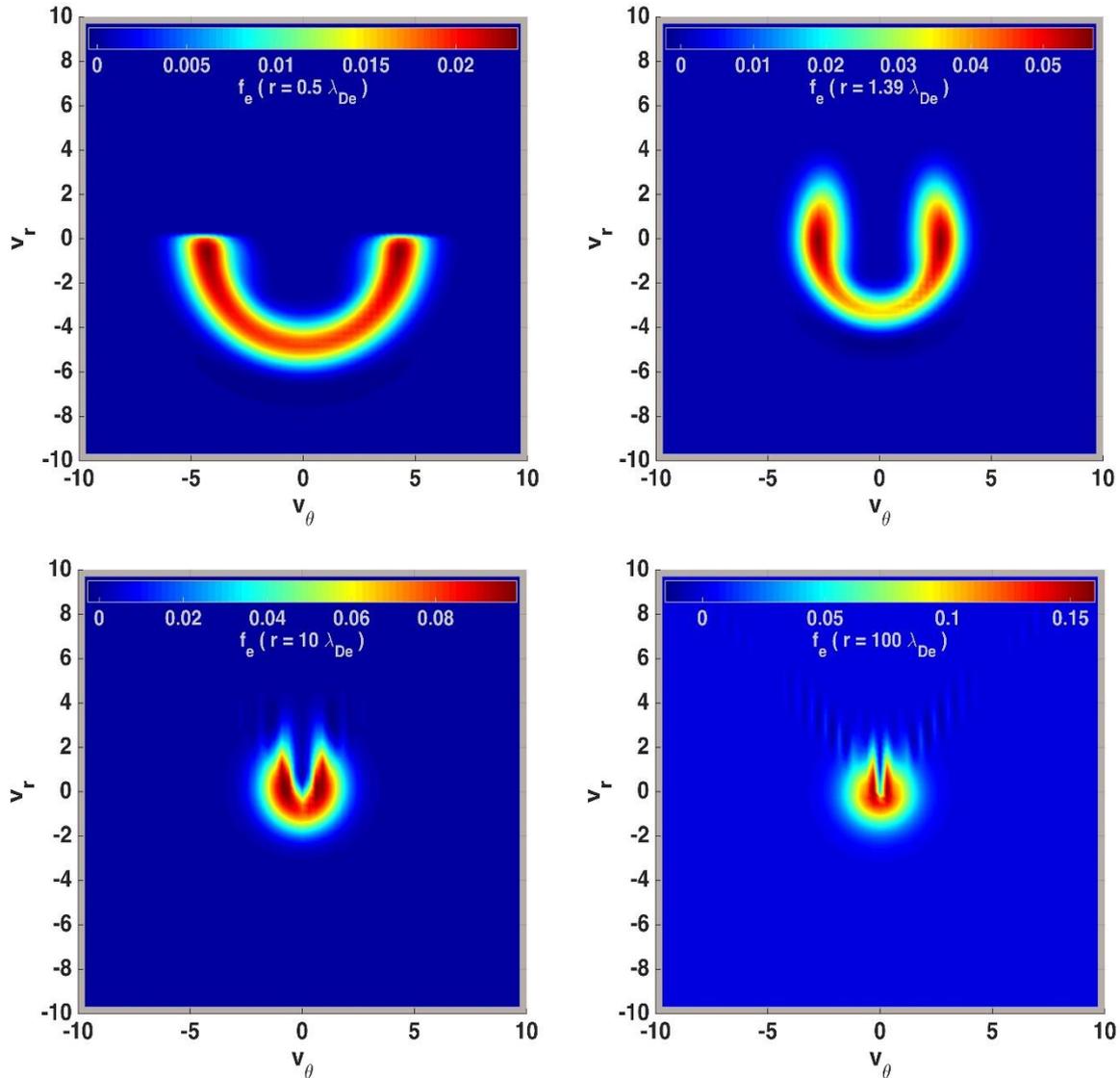


Figura 4: Funciones de distribución de electrones al final de la simulación  
 ( $\omega_{pe} t = 2000, N_r = 185, N_v = 65, N_{Hres} = 64$ ).

Además de las simulaciones cuyos resultados se presentan aquí, se realizaron numerosas otras con distintas resoluciones de las mallas, tamaños del dominio, potenciales de la sonda y radios de la sonda. Un problema significativo es que al disminuir  $\rho$ ,  $\Delta r$  debe hacerse más pequeño con el objetivo de capturar correctamente la dinámica del plasma en las cercanías de la sonda. Como consecuencia, se requieren pasos de tiempo muy pequeños para conservar la estabilidad del esquema de integración explícito de Runge-Kutta.

Todas las simulaciones realizadas exhibieron un comportamiento similar que el mostrado en las Figuras 1-6, aún para potenciales de la sonda negativos. Si bien la respuesta es siempre oscilatoria amortiguada al principio para tender luego de un tiempo (aproximadamente  $\omega_{pe} t = 500$ ) a un estado estacionario, se observa que al disminuir el radio de la sonda aumenta la frecuencia y el número de las oscilaciones.

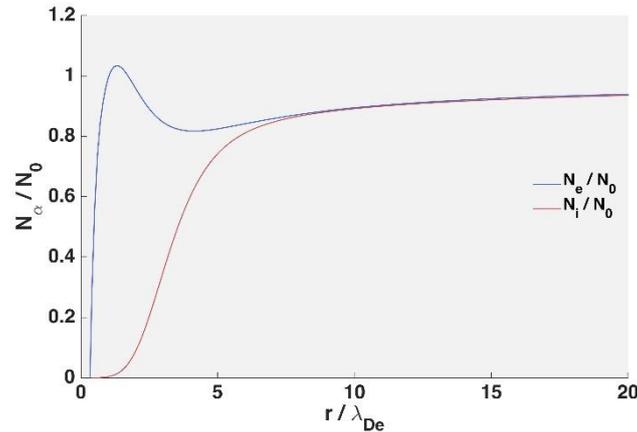


Figura 5: Distribución final de la densidad de electrones (curva azul) y de iones (curva roja) ( $\omega_{pe} t = 2000, N_r = 185, N_v = 65, N_{Hres} = 64$ ).

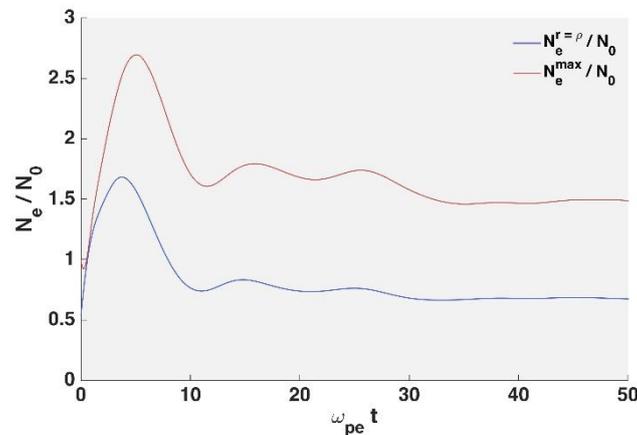


Figura 6: Evolución temporal de la densidad de electrones máxima (curva roja) y sobre la sonda (curva azul) ( $N_r = 281, N_v = 99, N_{Hres} = 96$ ).

#### 4. CONCLUSIONES

La importancia de resolver el sistema de Vlasov-Poisson radica en sus aplicaciones a la caracterización de plasmas y al diseño de amarras espaciales electrodinámicas. Si bien los códigos tipo PIC son los usados más ampliamente por su robustez, flexibilidad y facilidad de paralelización, el desarrollo de un código de tipo Vlasov Euleriano es necesario en la búsqueda de una descripción precisa de las funciones de distribución. El trabajo aquí presentado es la primera etapa de un proceso de adaptación y extensión del programa diseñado originalmente en la Universidad Politécnica de Madrid [15, 16] para estudiar la recolección inestacionaria de corriente en una sonda de Langmuir cilíndrica cuyo potencial es cambiado súbitamente desde cero hasta un valor finito.

Los resultados obtenidos hasta ahora se corresponden correctamente con los publicados en la referencia [15] por lo que es posible de ahora en adelante continuar con el desarrollo del programa para que permita resolver el sistema de Vlasov-Maxwell en lugar del sistema Vlasov-Poisson. Esta extensión del código es importante para estudiar casos donde la sonda se mueve respecto del plasma y casos donde el potencial de la sonda es variable en el tiempo.

En todos los casos simulados, se encuentra que la capa de plasma próxima a la sonda (*sheath*) exhibe oscilaciones al cambiar el potencial de la sonda y luego converge hacia un estado estacionario. La interacción entre el comportamiento del plasma y un potencial de la sonda variable en el tiempo es un problema no lineal, por lo que se cree que podría desembocar en una respuesta estacionaria, una oscilatoria o una caótica. De esto surge la necesidad de un estudio paramétrico mucho más amplio y detallado variando las temperaturas, el potencial y el radio de la sonda. Además, es interesante analizar el efecto que tendría tener en cuenta las colisiones.

Al comparar los resultados obtenidos con mallas de diferente resolución se encontró que las soluciones parecen no alcanzar una convergencia clara ni siquiera con la malla más densa presentada aquí. Sería pertinente un estudio más sofisticado de convergencia de la malla, donde si se logra una secuencia convergente, podría aplicarse el método

de extrapolación de Richardson.

El nivel de ruido observado en los resultados conseguidos es muy bajo si se lo compara con resultados previos obtenidos con códigos tipo PIC. Sin embargo, el costo de recursos computacionales del código de Vlasov Euleriano es muy alto en términos de memoria y potencia de cálculo, razón por la cual no permite estudiar casos con potenciales de la sonda muy por encima de  $15 k_B T_e$ . Esto remarca la necesidad de optimizar el programa presentado y de paralelizarlo eficientemente.

Otros inconvenientes encontrados son la generación de valores negativos de las funciones de distribución durante la simulación, y la aparición de fluctuaciones espurias en las funciones de distribución en las cercanías de  $r = r_{max}$  debidas posiblemente al carácter discontinuo en  $v_\theta = 0$  de la condición de contorno impuesta sobre el límite exterior del dominio. En el futuro se intentará reducir ambos efectos al mínimo posible.

## REFERENCIAS

- [1] Mott-Smith, H. M., and Langmuir, I., The theory of collectors in gaseous discharges. *Physical Review*, 28(4):727-763, 1926.
- [2] Sanmartín, J. R., Martínez-Sánchez, M., and Ahedo, E., Bare wire anodes for electrodynamic tethers. *Journal of Propulsion and Power*, 9(3):353-360, 1993.
- [3] Conrad, J. R., Sheath thickness and potential profiles of ion-matrix sheaths for cylindrical and spherical electrodes. *Journal of Applied Physics*, 62:777-779, 1987.
- [4] Mandell, M. J., Davis, V. A., Cooke, D. L., Wheelock, A. T., and Roth, C. J., Nascap-2k spacecraft charging code overview. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 34:2084-2093, 2006.
- [5] Roussel, J. F., Rogier, F., Dufour, G., Mateo-Velez, J. C., Forest, J., Hilgers, A., Rodgers, D., Girard, L., and Payan, D., SPIS open-source code: Methods, capabilities, achievements and prospects. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 36:2360-2368, 2008.
- [6] Bernstein, I. B., and Rabinowitz, I. N., Theory of electrostatic probes in a low density plasma. *Physics of Fluids*, 2(2):112-121, 1959.
- [7] Laframboise, J. G., *Theory of spherical and cylindrical Langmuir probes in a collisionless, Maxwellian plasma at rest*. Ph.D. dissertation, University of Toronto, 1966.
- [8] Sanmartín, J. R., and Estes, R. D., The orbital-motion-limited regime of cylindrical Langmuir probes. *Physics of Plasmas*, 6:395-405, 1999.
- [9] Sanmartín, J. R., Ion-Temperature-Sensitive effect in transient Langmuir probe response. *Physics of Fluids*, 15:391-401, 1972.
- [10] Calder, A. C., and Laframboise, J. G., Time-dependent sheath response to abrupt electrode voltage changes. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 2:655-666, 1990.
- [11] Onishi, T., *Numerical study of current collection by an orbiting bare tether*, Ph.D. dissertation, MIT, Cambridge, 2002.
- [12] Iza, F., and Lee, J. K., Particle-in-cell simulations of planar and cylindrical Langmuir probes: Floating potential and ion saturation current. *Journal of Vacuum Science & Technology A*, 24:1366-1372, 2006.
- [13] García, L. G., and Goedert, J., Numerical investigation of the influence of vacuum space on plasma sheath dynamics. *Physics Letters A*, 255(4-6):311-317, 1999.
- [14] Shoucri, M., Gerhauser, H., and Finken, K. H., Study of the generation of a charge separation and electric field at a plasma edge using Eulerian Vlasov codes in cylindrical geometry. *Computer Physics Communications*, 164:138-149, 2004.

- [15] Sánchez-Arriaga, G., A direct Vlasov code to study the non-stationary current collection by a cylindrical Langmuir probe. *Physics of Plasmas*, 20(1):013504, 2013.
- [16] Sánchez-Arriaga, G., and Pastor-Moreno D., *Direct Vlasov simulations of non-stationary cylindrical Langmuir probes in flowing plasmas*. Departamento de Física Aplicada, Escuela Superior de Ingenieros Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid, 2014.