



4^{to} Congreso Argentino de Ingeniería Aeronáutica



DETERMINACIÓN NUMÉRICA DEL FACTOR DE INTENSIFICACIÓN DE TENSIONES EN MODO I DE FRACTURA

Gustavo J. Krause^{a,b} y Luis M. Soria Castro^{a,c}

^a*Dpto. de Aeronáutica, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba;*
Av. Vélez Sársfield 1611 (X5016GCA) Córdoba, Argentina
<http://www.efn.uncor.edu>

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) <http://www.conicet.gov.ar>*

^c*Dpto. de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba*

Palabras Clave : factor de intensificación de tensiones, integral J , LEFM, FEM

Resumen

En este trabajo se presentan dos técnicas numéricas indirectas para el cálculo del factor de intensificación de tensiones (FIT) en modo I de fractura en el marco de la Mecánica de Fractura Lineal Elástica (LEFM) utilizando el Método de Elementos Finitos (FEM). Para la evaluación de las técnicas propuestas se analizan los modelos de grieta interna y de grieta de borde comparando los resultados numéricos con los valores analíticos calculados según la LEFM, considerando diferentes tamaños relativos de grieta. En la determinación numérica del FIT se utilizan las relaciones que vinculan este factor con la energía de relajación G . En la primera técnica la energía G se obtiene mediante el FEM a partir de la relación entre el cambio en la energía potencial total con respecto a la extensión de la grieta. En el segundo caso se hace uso de definición de la integral de contorno J , la cual es igual a G en el marco de LEFM, y que se determina numéricamente a partir de la solución del FEM. Los resultados obtenidos muestran que es posible determinar numéricamente el FIT con un buen grado de precisión respecto a los valores analíticos, aun cuando se utilicen mallas relativamente gruesas en el FEM.

1. INTRODUCCIÓN

El Método de Elementos Finitos (FEM) es uno de los métodos más utilizados en la actualidad para la resolución de problemas en los cuales se ven implicadas ecuaciones diferenciales llamados Problemas de Valores en el Contorno (BVP por sus siglas en inglés). Los problemas de elasticidad corresponden a este tipo y su resolución mediante el FEM es ampliamente utilizada, sin embargo, cuando existen grietas en el material el comportamiento de la solución no es suave en las cercanías de estas imperfecciones y el problema se verá gobernado localmente por la singularidad, cuya intensidad dependerá de la geometría y de las fuerzas actuantes.

La primera técnica utilizada para reproducir numéricamente el comportamiento singular en una grieta fue el uso de mallas extremadamente refinadas en la zona del extremo [1, 2]. Esta técnica no precisa ninguna modificación especial de un código convencional de elementos finitos, pero resulta ineficiente ya que aumenta significativamente el número de grados de libertad del problema. Posteriormente se propuso un buen número de trabajos relacionados con el desarrollo de elementos específicos que permiten modelar de forma adecuada el comportamiento en el entorno de la grieta, de donde surgieron los llamados elementos singulares cuya implementación permite evitar el elevado grado de refinamiento modelando correctamente el comportamiento teórico [3]. Más adelante surgió el Método de Elementos Finitos Extendido (FEMX) para el cual se introdujo el concepto de función ramificada para considerar grietas con múltiples ramas en geometrías complejas [4, 5].

Más allá de las aplicaciones *directas* del FEM en mecánica de fracturas, este método se ha aplicado con el objetivo fundamental de obtener los Factores de Intensificación de Tensiones (FIT), que son los parámetros que caracterizan el comportamiento de la solución cerca de la singularidad. Para ello existen diferentes técnicas, entre las cuales los métodos energéticos (o *indirectos*) presentan importantes ventajas ya que utilizan los resultados obtenidos numéricamente en zonas alejadas del extremo de la grieta, donde la solución muestra menores errores.

Mediante los métodos energéticos es posible obtener resultados precisos con mallas relativamente gruesas y sin necesidad de fuertes refinamientos en la zona de la grieta ni el empleo de elementos especiales. Este enfoque también permite la implementación de técnicas numéricas relativamente sencillas para obtener el FIT [6]. Como inconveniente, estos métodos presentan dificultad para separar las contribuciones asociadas a cada tipo de apertura de grieta al FIT. Por otro lado, en problemas en tres dimensiones es necesario asumir estados de tensión o deformación plana en el frente de la grieta. En ese sentido, mediante la determinación del campo de tensiones y deformaciones es posible obtener la energía de relajación G y a partir de ella el FIT (esta relación es directa en casos bidimensionales). De este modo, el problema de obtención del FIT se reduce a la solución del problema elástico.

La integral de contorno J (o J -integral) consiste en un método indirecto para la obtención del FIT, el cual fue propuesta por Rice originalmente para una entalla en un problema bidimensional [7, 8]. La integral J constituye una integral sobre una línea que rodea el extremo de la grieta que se basa en consideraciones de conservación de la energía, lo cual le confiere la propiedad de ser independiente del camino. Es esta propiedad la que hace de gran utilidad el uso de J , ya que es posible determinar la integral sin considerar las zonas cercanas al extremo de la grieta, para luego obtener el FIT mediante las relaciones que existen entre J y G .

El objetivo de este trabajo es determinar el factor de intensificación de tensiones a partir de los resultados numéricos obtenidos mediante el método de elementos finitos en modo I de fractura, considerando grietas internas y grietas de borde en problemas de tensión plana. La determinación del FIT se realiza de manera indirecta utilizando primeramente un método basado en la energía de relajación G que se calcula a partir de la variación de la energía potencial total cuando se modifica la longitud de la grieta, y en segundo término a través de la definición de la integral J y la evaluación numérica de la misma. Finalmente se comparan los resultados obtenidos con las soluciones analíticas disponibles para evaluar la precisión de cada uno de los métodos y analizar la influencia del tamaño y la calidad de las mallas utilizadas.

2. MARCO TEÓRICO

Las primeras soluciones basadas en la elasticidad para problemas de fractura correspondieron al análisis del campo de tensiones alrededor de agujeros circulares o de forma elíptica en dominios infinitos. En 1898 Kirsch analizó una placa de longitud "infinita" con un agujero circular en el centro y sometida a una tensión uniforme σ_0 . Posteriormente Inglis hizo lo propio considerando un agujero elíptico en 1913. En 1939, Westergaard propuso la primera solución para el problema de fractura para grietas de extremos agudos, pero no fue hasta 1957 cuando Irwin

introdujo el concepto de Factor de Intensificación de Tensiones (FIT) definido como:

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{Bmatrix} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \begin{Bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

donde las tensiones σ_{ij} están expresadas en coordenadas polares (r, θ) y los factores K_i están asociados a los tres modos de movimiento independientes de las superficies superior e inferior de la grieta con respecto a la otra, según se detalla a continuación (ver Figura 1):

- Modo de apertura (Modo I): las dos superficies son traccionadas en la dirección x_2 tendiendo a apartarse una de otra, con una deformación simétrica respecto al plano x_1-x_3 y x_1-x_2 .
- Modo de corte (Modo II): las dos superficies de la grieta se deslizan una respecto a la otra en la dirección del eje x_1 , con deformaciones simétricas según el plano x_1-x_2 y antisimétricas con respecto a x_1-x_3 .
- Modo de desgarro (Modo III): las superficies de la grieta se deslizan una respecto a la otra en la dirección x_3 , mientras las deformaciones son antisimétricas según el plano x_1-x_2 y x_1-x_3 .

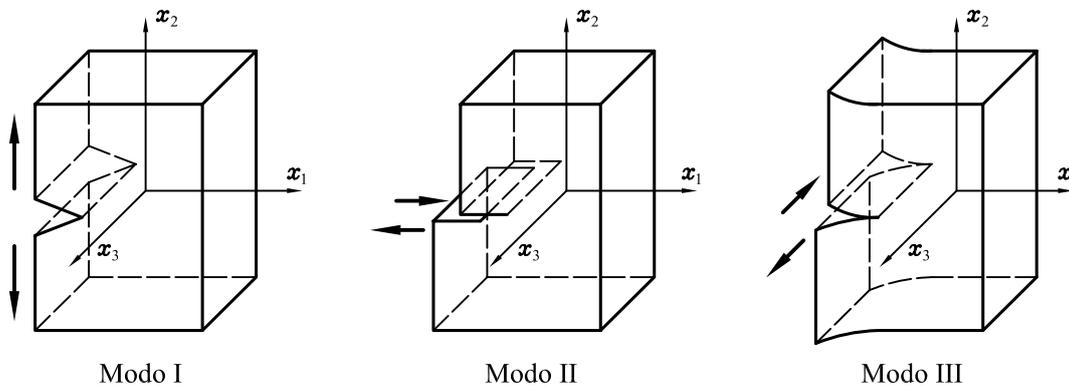


Figura 1: Esquema gráfico de los tres modos de fractura definidos por Westergaard.

En este trabajo se analizan problemas de fractura en Modo I solamente. De las ecuaciones de la solución de Westergaard, con $\theta = 0$ se obtiene:

$$\begin{aligned} K_I &= \sqrt{2\pi r} \sigma_{22} \\ &= \sqrt{2\pi r} \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} \\ &= \sigma_0 \sqrt{\pi a}, \end{aligned} \quad (2)$$

donde r se extiende desde el extremo de la grieta y θ es el ángulo respecto al eje x_1 . La longitud de la grieta es a .

El FIT es una medida de la intensidad de la singularidad, y cuando se consideran dominios finitos (como sucede en la realidad), K_I resulta afectado por parámetros que dependen de la geometría de la pieza.

Dentro del rango de elasticidad lineal de los materiales, la Mecánica de Fractura Lineal Elástica (LEFM por sus siglas en inglés) tiene por objetivo determinar en qué escenarios una fractura es inestable y produce la falla del elemento, lo cual se produce cuando el factor K_I alcanza un valor crítico K_{Ic} , denominado tenacidad a la fractura. Este factor representa la habilidad del material para resistir un determinado campo de tensiones en la punta de la grieta, sin que ésta se propague inestablemente.

A grandes rasgos, la LEFM considera que la presencia de una grieta con extremo agudo magnifica la tensión en ese punto a un valor infinito. Evidentemente no existe material con un límite elástico tal y por lo tanto en esa zona sucederá la plastificación de la pieza, produciéndose un enromamiento de la punta y una extensión plastificada que dependerá de las cargas aplicadas y la geometría. La LEFM requiere que la deformación plástica en el extremo de la grieta tenga un efecto despreciable sobre la tensión elástica en la estructura, esto significa que existe sólo una pequeña porción de material plastificado en relación al tamaño de la grieta y al de la estructura, por lo tanto su aplicación es más apropiada para materiales frágiles. En casos donde no se cumple el requisito anterior es necesario

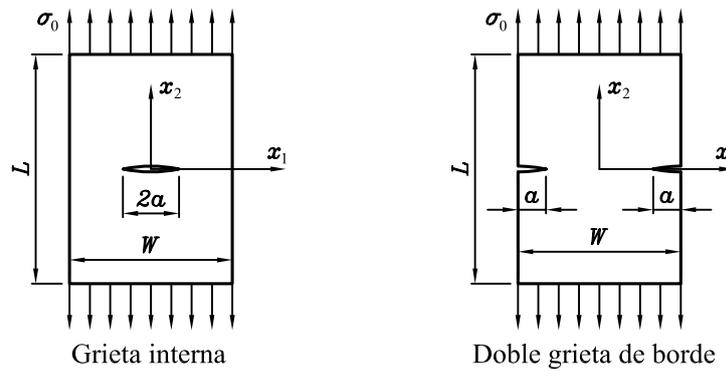


Figura 2: Significado de los parámetros geométricos intervinientes en las expresiones del FIT para modo I de fractura.

utilizar una teoría que considere los efectos de la plastificación del material. La Mecánica de Fractura Elasto-Plástica (EPFM) contempla estas situaciones, pero desafortunadamente la aplicación de métodos numéricos (como el FEM) a los conceptos de esta teoría resultan en códigos computacionales complejos. Por este motivo, a pesar de las limitaciones propias de la LEFM, en algunos casos se sigue utilizando para una evaluación rápida y relativamente precisa de los factores de intensidad de tensiones.

2.1. El Factor de Intensificación de Tensiones (FIT)

Para el caso de los problemas más simples se han desarrollado análisis y se han obtenido los valores teóricos de los FIT, los cuales pueden ser encontrados en cualquier texto de Mecánica de Fractura [8]. Las soluciones para los casos analizados en este trabajo son:

Panel con grieta central:

$$K_I = \left[1 + 0,256 \left(\frac{a}{W} \right) - 1,152 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 12,2 \left(\frac{a}{W} \right)^3 \right] \sigma_0 \sqrt{\pi a}. \quad (3)$$

Panel con doble grieta de borde:

$$K_I = \left[1,12 + 0,43 \left(\frac{a}{W} \right) - 4,79 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 15,46 \left(\frac{a}{W} \right)^3 \right] \sigma_0 \sqrt{\pi a}. \quad (4)$$

donde el significado de los parámetros intervinientes se muestra en la Figura 2.

2.2. Transferencia de energía en el crecimiento de grietas

El modelo de Griffith para sólidos elásticos muestra que la propagación de una grieta es causada por una transferencia de energía del trabajo externo y/o la energía de deformación a la energía de superficie.

En base a consideraciones termodinámicas, considerando un sistema adiabático y una aplicación cuasi-estática de las cargas, suponiendo además que el espesor es unitario (problema bidimensional), puede escribirse el balance energético durante el crecimiento de una grieta de longitud a como [7]:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \left(\frac{\partial U^e}{\partial a} + \frac{\partial U^p}{\partial a} \right) + \frac{\partial \Gamma}{\partial a}, \quad (5)$$

donde W es el trabajo externo, U^e y U^p son la energía de deformación elástica y plástica, respectivamente, y Γ es la energía de superficie. Entonces, siendo la energía potencial $\Pi = U^e - W$ resulta

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \frac{\partial U^p}{\partial a} + \frac{\partial \Gamma}{\partial a}. \quad (6)$$

Esto indica que la reducción de la energía potencial total durante el crecimiento de la grieta es igual a la energía disipada en la deformación plástica y en el crecimiento de la grieta.

Considerando un material perfectamente elástico se define

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \frac{\partial W}{\partial a} - \frac{\partial U^e}{\partial a} = \frac{\partial \Gamma}{\partial a}, \quad (7)$$

donde G representa la energía disponible para el crecimiento de la grieta.

Existe una relación entre el factor de intensificación de tensiones K_I y la energía de relajación G . La energía relajada durante una extensión Δa de la grieta puede determinarse calculando el trabajo realizado por las fuerzas de superficie actuando a través de la longitud Δa cuando la grieta se cierra desde una longitud $(a + da)$ hasta una longitud a . Asumiendo elasticidad lineal y teniendo en cuenta que se trata de dos superficies (superior e inferior)

$$G = \frac{1}{\Delta a} \int_a^{a+\Delta a} \sigma_{22}(x_1) u_2(x_1) dx_1. \quad (8)$$

Operando esta expresión, considerando las soluciones de Westergaard para las tensiones alrededor de la grieta, con $\theta = \pi$ se llega a:

$$G = \frac{K_I^2}{E'}, \quad (9)$$

donde $E' = E$ para tensión plana, y $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$ para deformación plana, siendo E el módulo de elasticidad del material y ν el coeficiente de Poisson.

2.3. La integral J

La integral J es una definición que puede utilizarse para determinar los FIT. Como se dijo anteriormente, la técnica basada en la integral J pertenece al grupo de los métodos indirectos, los cuales tienen la ventaja de utilizar los resultados de tensiones y deformaciones en zonas alejadas del extremo de la grieta, menos influenciados por la magnificación producida por la singularidad. En el marco de la LEFM y para problemas bidimensionales, la integral J puede vincularse directamente con el factor K_I a través de la relación que existe entre J y G .

En 1974 Eshelby definió una serie de integrales de contorno independientes del camino, las cuales están basadas en el teorema de la conservación de la energía. La forma bidimensional de una de esas integrales puede escribirse como:

$$J = \oint_{\Gamma} \left(w dx_2 - \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} d\Gamma \right) \quad (10)$$

donde $w = \int_0^\varepsilon \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ es la densidad de energía de deformación (se utiliza notación indicial), Γ es un contorno cerrado que se recorre en sentido antihorario, \mathbf{t} es el vector de tracciones en una dirección definida por la normal \mathbf{n} saliente al contorno ($t_i = \sigma_{ij}n_j$), \mathbf{u} es el vector de desplazamientos y $d\Gamma$ es el elemento diferencial de arco Γ .

La igualdad $J = 0$ se cumple para cualquier contorno cerrado Γ dentro del dominio Ω . Teniendo en cuenta que $dx_1 = -n_2 d\Gamma$ y $dx_2 = -n_1 d\Gamma$ y siendo $t_i = n_j \sigma_{ij}$, la ecuación (10) puede escribirse:

$$J = \oint_{\Gamma} \left(w n_1 - n_j \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) d\Gamma.$$

Aplicando el teorema de Green $\oint_{\Gamma} v_i n_i d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega$, resulta:

$$J = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \right] dx_1 dx_2.$$

De la expresión de la densidad de energía interna w resulta $\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1}$, y considerando que $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, sustituyendo las expresiones se obtiene $\frac{\partial w}{\partial x_1} = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)$. Por otro lado

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) + \underbrace{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}}_0,$$

entonces $\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)$, y finalmente resulta:

$$J = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \right] dx_1 dx_2 = 0. \quad (11)$$

El resultado de la ecuación (11) es muy importante ya que permite demostrar que el valor de la integral J sobre una curva alrededor del extremo de la grieta es independiente del camino. Considerando un contorno cerrado $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$, en el cual Γ_1 y Γ_3 son contornos elegidos arbitrariamente, y Γ_2 y Γ_4 coinciden con las caras de la grieta, tal como se muestra en la Figura 3, J será nula de acuerdo a la demostración anterior. Por otro lado, sobre los contornos Γ_2 y Γ_4 el vector de tracciones t_i es nulo y además $dx_2 = 0$, por lo tanto las contribuciones de estos segmentos a J son nulas, lo que implica que las contribuciones debidas a Γ_1 y Γ_3 resultan iguales, y ya que estos contornos son elegidos arbitrariamente, la independencia de la trayectoria puede asumirse para cualquier curva que rodee la punta de la grieta.

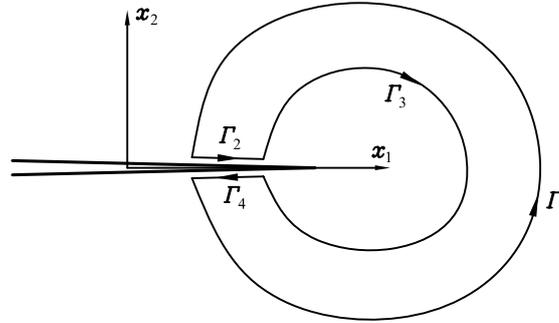


Figura 3: Esquema de definición de la curva Γ para determinar el valor de la integral J y demostrar la independencia del camino.

2.4. La relación entre J y G

Lo que sigue a continuación es establecer la relación entre la definición matemática de J y la energía de relajación G para obtener a partir de ésta el FIT. Esta relación se obtiene teniendo en cuenta que cuando J es aplicada en un contorno alrededor del extremo de la grieta, ella representa el cambio en la energía potencial para una extensión virtual de la grieta da , tal como se demuestra a continuación.

Considerando una grieta en un dominio bidimensional, rodeada por un contorno Γ el cual abarca un área Ω , bajo condiciones cuasi-estáticas, y en ausencia de fuerzas de masa, la energía potencial está dada por:

$$\Pi = \int_{\Omega} w \, d\Omega - \oint_{\Gamma} t_i u_i \, d\Gamma. \quad (12)$$

Para una extensión virtual de la grieta, el cambio en la energía potencial es:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{da} &= \int_{\Omega} \frac{dw}{da} \, d\Omega - \oint \left[t_i \frac{du_i}{da} + u_i \frac{dt_i}{da} \right] \, d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \frac{dw}{da} \, d\Omega - \underbrace{\int_{\Gamma_u} \left[t_i \frac{du_i}{da} + u_i \frac{dt_i}{da} \right] \, d\Gamma}_0 - \oint_{\Gamma_t} \left[t_i \frac{du_i}{da} + u_i \frac{dt_i}{da} \right] \, d\Gamma \end{aligned}$$

donde se ha descompuesto Γ en dos partes, una con desplazamientos prefijados (Γ_u) y otra con tracción prefijada (Γ_t). Como $\Gamma_u = 0$ a lo largo de la trayectoria, se mantiene la integral cerrada en Γ_t . Además, como se consideran condiciones cuasi-estáticas $dt_i/da = 0$ (la tracción permanece constante durante el crecimiento de la grieta). Por otro lado, si se toma el origen de coordenadas en el extremo de la grieta, los ejes coordenados se desplazan con el crecimiento de la misma, y en consecuencia:

$$\frac{d}{da} = \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{ya que } \frac{\partial x_1}{\partial a} = -1.$$

Sustituyendo en $\frac{d\Pi}{da}$,

$$\frac{d\Pi}{da} = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial w}{\partial a} - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \, d\Omega - \oint_{\Gamma_t} t_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial a} - \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \, d\Gamma.$$

Reescribiendo $\frac{\partial w}{\partial a} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial a} = \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a} \right)$ y por el teorema de la divergencia

$$\oint_{\Gamma_t} t_i \frac{\partial u_i}{\partial a} d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial a} d\Omega.$$

Finalmente, reemplazando las igualdades

$$\frac{d\Pi}{da} = \oint_{\Gamma_t} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial a} d\Omega,$$

y aplicando nuevamente el teorema de la divergencia

$$-\frac{d\Pi}{da} = \oint_{\Gamma_t} \left(w n_1 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) d\Gamma = \oint_{\Gamma_t} \left(w dx_2 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \right).$$

De esta forma queda establecido que la integral J es igual a la energía de relajación para materiales lineales y no lineales bajo condiciones cuasi-estáticas.

Para el caso de materiales elásticos, $-\frac{d\Pi}{da} = G$, en consecuencia

$$J = G, \quad (13)$$

y así la integral J puede utilizarse para obtener el FIT mediante esta relación y la ecuación (8) que vincula la energía de relajación G con K_I (en el caso de tensión plana). La ventaja de esta técnica radica en la independencia de la trayectoria para obtener J , lo cual permite utilizar curvas de integración alejadas de la zona mayormente influenciada por la singularidad.

3. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

Para resolver el problema de tensión plana se utiliza el método de los elementos finitos en dos dimensiones, considerando pequeñas deformaciones y materiales elásticos lineales. El estado plano de tensión implica que las tensiones en una dirección son nulas ($\sigma_{i3} = 0$, por lo tanto el tensor de tensiones puede reducirse a

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (14)$$

siend \mathbf{D} la matriz constitutiva y $\boldsymbol{\varepsilon}$ el tensor reducido de deformaciones. La expresión anterior puede escribirse en términos de una matriz \mathbf{B} de operadores diferenciales y los desplazamientos \mathbf{u} :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad (15)$$

donde

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Por lo tanto, para una discretización de elementos finitos, las deformaciones nodales de un elemento de n nodos se escriben:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N^1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N^2}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial N^n}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N^2}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial N^n}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^1}{\partial x_2} & \frac{\partial N^1}{\partial x_1} & \frac{\partial N^2}{\partial x_2} & \frac{\partial N^2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N^n}{\partial x_2} & \frac{\partial N^n}{\partial x_1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_e} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ \vdots \\ u_1^n \\ u_2^n \end{bmatrix} = \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e, \quad (17)$$

siendo N^i las funciones de forma del elemento y los u_j^i los desplazamientos del nodo i en la dirección j . La matriz de rigidez \mathbf{K}_e de cada elemento se obtiene considerando el principio de trabajos virtuales y las coordenadas generalizadas ζ y η y la matriz jacobiana \mathbf{J}

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta, \quad (18)$$

para obtener el sistema

$$\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{R}_e, \quad (19)$$

para cada elemento, siendo \mathbf{R}_e el vector de cargas nodales.

Finalmente se realiza el ensamblaje para obtener el sistema de ecuaciones del sistema y determinar los desplazamientos nodales. Con ellos se calculan el resto de las cantidades de interés (deformaciones y tensiones). En este trabajo se implementa un código de elementos finitos para elementos cuadriláteros de ocho nodos (cuadráticos) serendípitos.

3.1. Determinación numérica de la energía G

Como se dijo anteriormente, en este trabajo se busca calcular numéricamente el FIT mediante métodos indirectos. Para ello consideramos primero el caso de la obtención del FIT a partir de la energía G según la ecuación (8).

Teniendo en cuenta la ecuación (7), la energía de relajación puede aproximarse mediante:

$$G \approx -\frac{\Delta \Pi}{\Delta a}, \quad (20)$$

donde la energía potencial total Π puede obtenerse a partir de la aproximación de elementos finitos:

$$\Pi = U^e - W = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{R}. \quad (21)$$

Para obtener numéricamente la energía de relajación G primero se calcula la energía potencial Π_1 para una configuración inicial, y luego se realiza un incremento Δa de la grieta mediante una reestructuración de la malla como se indica en la Figura 4. Seguidamente se obtiene la nueva energía potencial Π_2 y se calcula la energía de relajación aproximada:

$$G \approx -\frac{\Pi_2 - \Pi_1}{\Delta a}. \quad (22)$$

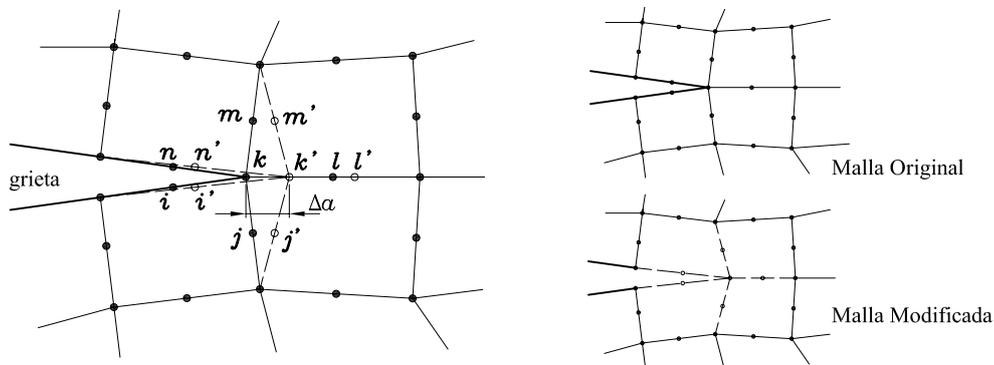


Figura 4: Reestructuración de la malla para la determinación de la energía de relajación G .

3.2. Cálculo numérico de la integral J

Teniendo en cuenta la definición de la integral J dada en la ecuación (10), es necesario conocer la densidad de energía de deformación w y el producto $\mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}$. Para el caso de materiales elásticos, la densidad de energía de deformación se escribe

$$w = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}). \quad (23)$$

Por otro lado, el producto $\mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}$ resulta

$$t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} = (\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2) \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}_{\varepsilon_{11}} + (\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (24)$$

donde las tensiones se conocen de la aplicación del FEM y las derivadas $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ se obtienen numéricamente considerando la matriz de operadores diferenciales \mathbf{B} dada en la ecuación (17), que para el caso de un elemento de 8 nodos resulta:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} B_{3,2} & B_{3,4} & \cdots & B_{3,14} & B_{3,16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \\ \vdots \\ u_2^7 \\ u_2^8 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Estas cantidades deben ser calculadas específicamente para obtener la integral J ya que las mismas no son provistas en la solución convencional del FEM.

El camino de integración se realiza directamente a través de los contornos interelementales, por lo que la integral de línea se transforma en una sumatoria de integrales discretas cuyos dominios de integración son los lados de los elementos que conforman la curva Γ , tal como se muestra en la Figura 5. De esta manera, sobre cada subintervalo se realiza una integración numérica considerando las funciones de forma de segundo grado y los valores nodales de las tensiones, deformaciones y la derivada $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$.

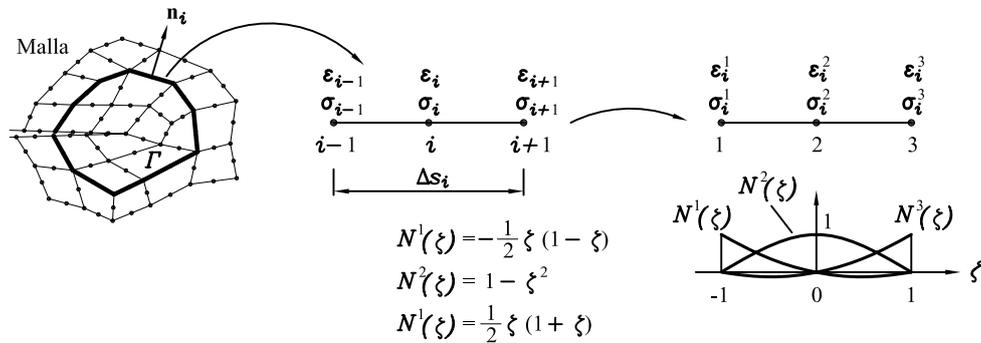


Figura 5: Esquema de cálculo de la integral J .

Si bien los puntos óptimos para el cálculo de las tensiones y deformaciones, en el sentido de que presentan el menor error, corresponden a los puntos de integración de Gauss [9], la utilización de estos puntos conlleva la dificultad de tener que identificar su ubicación en la geometría real, la cual no es explícita. Por ese motivo aquí se utiliza la trayectoria a través de los nodos del elemento, cuya ubicación es un dato inicial del problema posibilitando identificar fácilmente la curva de integración. Evidentemente esta simplificación irá en detrimento de la precisión de la solución, siendo uno de los propósitos de este trabajo evaluar la validez de la simplificación realizada.

Teniendo en cuenta la Figura 5, la integral J será la sumatoria de las contribuciones J_i de cada segmento de elemento:

$$\begin{aligned} J_i &= \int_{-1}^1 w_i(\zeta) \frac{\Delta s_i}{2} d\zeta n_{1i} - \int_{-1}^1 \mathbf{t}_i(\zeta) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_1}(\zeta) \frac{\Delta s_i}{2} d\zeta = \\ &= \frac{\Delta s_i}{2} \left[n_{1i} \sum_{g=1}^2 w_i(\zeta_g) W_g - \sum_{g=1}^2 \mathbf{t}_i(\zeta_g) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_1}(\zeta_g) W_g \right] \end{aligned}$$

donde ζ_g son los puntos de integración de la cuadratura y W_g los pesos asociados a ellos. En este caso se utiliza una cuadratura con dos puntos de integración suficientes para calcular de manera exacta los polinomios de segundo grado que forman la base de funciones de forma. Las cantidades en los puntos de Gauss se obtienen interpolando

por medio de las funciones de forma.

$$w(\zeta_g) = \sum_{i=1}^3 N^i(\zeta_g) w^i$$

$$\mathbf{t}(\zeta) = \sum_{i=1}^3 N^i(\zeta_g) \mathbf{t}^i$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}(\zeta_g) = \sum_{i=1}^3 N^i(\zeta_g) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right)^i$$

donde el superíndice i indica el valor de la cantidad en el nodo i .

Para verificar la validez de la formulación propuesta se analizan los resultados de la integral J obtenidos numéricamente para diferentes curvas cerradas en un problema de tensión plana conocido, como se muestra en la Figura 6. En este *benchmark* la tensión máxima se produce en el punto B siendo $\sigma_{11} = 4,34$ Pa [10], valor que es obtenido por el código para la malla indicada en la Figura 7. Allí además se indican tres curvas para las cuales se calcula la integral J . De acuerdo a la Sección 2.4, las integrales J son nulas sobre curvas cerradas, situación que es correctamente reproducida por el código, ya que para las curvas de la Figura 7 se obtienen valores del orden de 10^{-15} Pa m.

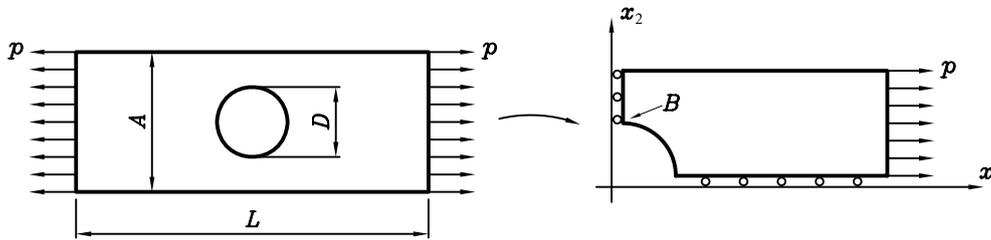


Figura 6: *Benchmark* para evaluar códigos numéricos para tensión plana. Las dimensiones son $L = 1,00$ m, $A = 0,4$ m, $D = 0,20$ m, $t = 0,01$ m, $E = 20700$ MPa, $\nu = 0,29$ y $p = 0,01$ N/m

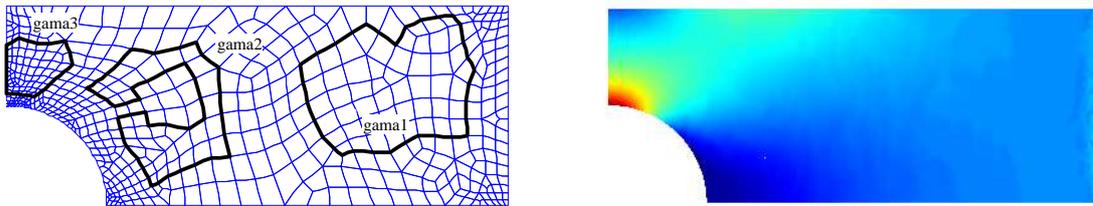


Figura 7: Malla de elementos finitos y distribución de tensiones σ_{11} para el problema de la Figura 6. La tensión máxima es $\sigma_{11} = 4,35$ Pa.

3.3. Determinación numérica del FIT

Una vez calculada ya sea la energía de relación G o la integral de contorno J , el cálculo del factor de intensificación de tensiones es directo al considerar la ecuación (8) y la relación (13):

$$K_I = \sqrt{\frac{G}{E}} = \sqrt{\frac{J}{E}}, \quad (26)$$

ya que se está considerando el modo I de fractura en tensión plana.

4. RESULTADOS

Habiendo presentado el método y verificado el código numérico ahora se procede con la presentación de los resultados. Se evalúan dos tipos de modelos de fractura, uno con una grieta central (interna) y otro con doble grieta

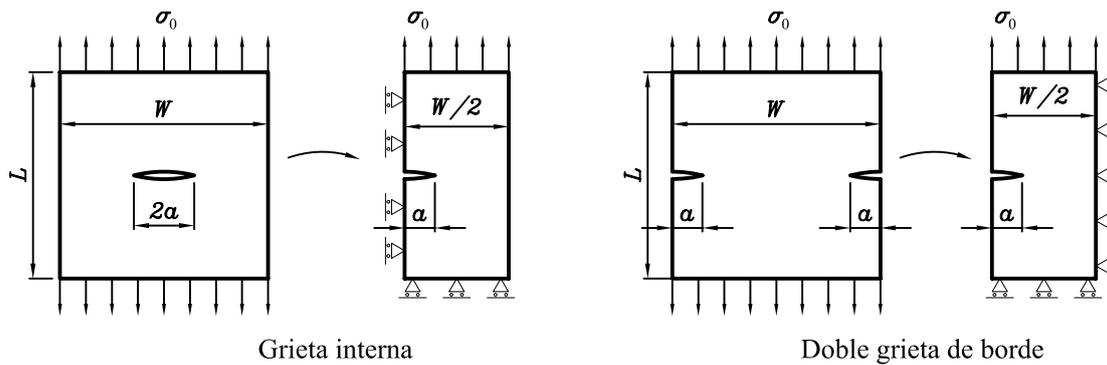


Figura 8: Modelos para el análisis de grieta de borde y grieta interna. Reducción del dominio por condiciones de simetría. Los datos son $W = 10$, $L = 10$, $t = 1$, $E = 1$, $\nu = 0,3$ y $\sigma_0 = 1$.

de borde, ambos en condiciones de tensión plana, tal como se muestra en la Figura 8, donde además se detalla el dominio computacional considerado de acuerdo a las condiciones de simetría de cada problema.

Cada uno de los modelos de grieta se analizan para las siguientes relaciones dimensionales: $a/W = 0,05, 0,10, 0,15$ y $0,20$. El análisis consiste en determinar el valor del factor K_I a partir de la energía de relajación G y de la integral J , comparando los resultados para mallas con diferentes niveles de refinamiento, partiendo de mallas relativamente gruesas con tamaños de elementos aproximadamente uniformes en todo el dominio hacia mallas con refinamiento localizado esencialmente en la zona del extremo de la entalla. Debido a la utilización de condiciones de simetría, se observa que ambos modelos comparten la misma geometría diferenciándose entre sí sólo por las condiciones de borde. De esta manera es posible utilizar las mismas mallas tanto para la grieta de borde como para la grieta central. En la Figura 9 pueden observarse las tres mallas utilizadas para el caso de $a/W = 0,10$ y la distribución de tensiones σ_{22} obtenida en cada caso. Allí se indica además la cantidad de elementos de cada malla, siendo estas cantidades aproximadamente iguales para las demás relaciones a/W analizadas.

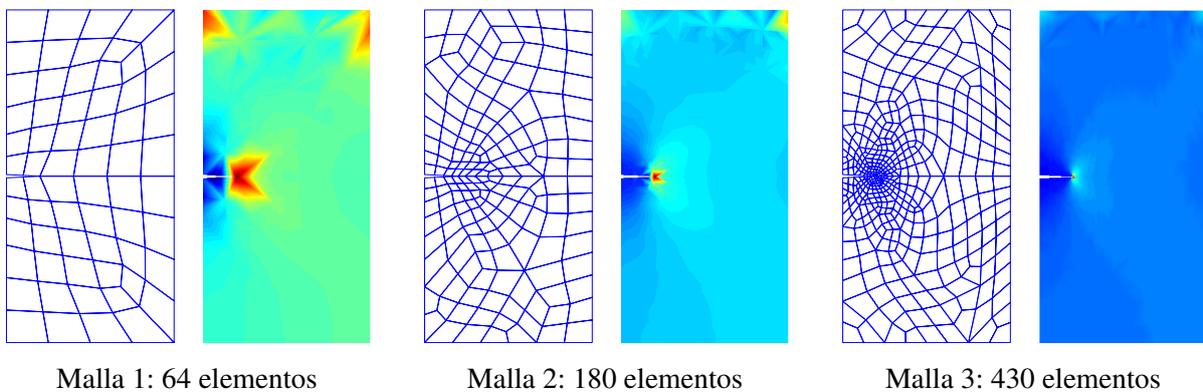


Figura 9: Modelos de malla utiliza para el caso de $a/W = 0,10$ y distribución de tensiones σ_{22} correspondiente.

4.1. Grieta interna

Para el modelo de grieta interna, el factor de intensificación de tensiones se obtiene con la ecuación (3). En la Tabla 1 se muestran los resultados del FIT obtenidos numéricamente mediante la técnica de la energía de relajación G y de la integral de contorno J , y se compara su valor con el factor K_I teórico para los distintos tamaños de grieta considerados. Analizando estos resultados, se observa en general que la técnica de la integral J es más precisa que la técnica basada en la energía G , especialmente en los casos donde se utilizan mallas más gruesas (malla 1 en la tabla). Este resultado es predecible, ya que los elementos cercanos al extremo de la grieta no intervienen en el cálculo de J cuando se utilizan curvas de integración suficientemente alejadas del mismo, mientras que éstos sí intervienen para el cálculo de G , siendo su efecto más importante cuando existen relativamente pocos elementos en todo el dominio.

Grieta	Malla	Técnica Energía G			Técnica J -integral		
		G	K_{IG}	ε (%)	J	K_{IJ}	ε (%)
$a/W = 0,05$ $K_I = 1,268$	1	1,009	1,005	-20,8	1,542	1,242	-2,1
	2	1,412	1,188	-6,3	1,591	1,262	-0,5
	3	1,701	1,304	2,9	1,627	1,276	0,6
$a/W = 0,10$ $K_I = 1,819$	1	3,380	1,838	1,6	3,203	1,790	-1,6
	2	3,580	1,892	4,0	3,233	1,798	-1,2
	3	3,531	1,879	3,3	3,365	1,834	0,8
$a/W = 0,15$ $K_I = 2,287$	1	5,462	2,337	2,2	5,493	2,344	2,5
	2	6,118	2,474	8,1	5,358	2,315	1,2
	3	5,515	2,348	2,7	5,184	2,277	-0,5
$a/W = 0,20$ $K_I = 2,764$	1	8,419	2,902	4,97	8,281	2,878	4,1
	2	8,047	2,837	2,63	8,121	2,850	3,1
	3	7,502	2,739	-0,9	7,591	2,755	-0,3

Tabla 1: Comparación entre el factor de intensificación de tensiones K_I teórico y los valores obtenidos numéricamente mediante la técnica basada en la energía de relajación G y en la integral de contorno J para el modelo de grieta interna considerando distintos tamaños relativos de la grieta.

4.2. Grieta de borde

En el caso de la grieta de borde, el factor K_I se obtiene con la ecuación (4). De igual manera que en el modelo anterior, en la Tabla 2 se presenta la comparación entre los resultados numéricos y el valor analítico del FIT para distintas relaciones a/W y diferentes mallas. Nuevamente se observa el mismo comportamiento, en el cual el método basado en la integral J es en general más preciso que la técnica basada en la energía de relajación G .

Grieta	Malla	Técnica Energía G			Técnica J -integral		
		G	K_{IG}	ε (%)	J	K_{IJ}	ε (%)
$a/W = 0,05$ $K_I = 1,418$	1	1,252	1,119	-21,1	1,924	1,387	-2,2
	2	1,775	1,332	-6,0	2,004	1,416	-0,2
	3	2,155	1,468	3,5	2,019	1,421	0,2
$a/W = 0,10$ $K_I = 2,004$	1	4,306	2,075	3,6	4,110	2,027	1,2
	2	4,454	2,111	5,3	3,974	1,993	0,5
	3	4,363	2,089	4,2	4,136	2,034	1,5
$a/W = 0,15$ $K_I = 2,451$	1	6,425	2,535	3,4	6,439	2,538	3,5
	2	7,255	2,693	9,9	6,267	2,504	2,2
	3	6,546	2,556	4,4	6,085	2,467	0,7
$a/W = 0,20$ $K_I = 2,853$	1	9,194	3,032	6,3	9,017	3,003	5,3
	2	8,838	2,973	4,2	8,900	2,983	4,6
	3	8,362	2,892	1,4	8,298	2,881	1,0

Tabla 2: Comparación entre el factor de intensificación de tensiones K_I teórico y los valores obtenidos numéricamente mediante la técnica basada en la energía de relajación G y en la integral de contorno J para el modelo de grieta de borde considerando distintos tamaños relativos de la grieta.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se han aplicado dos técnicas numéricas indirectas para el cálculo del factor de intensificación de tensiones (FIT) en Modo I de fractura dentro del marco de la Mecánica de Fractura Lineal Elástica (LEFM) y se han comparado los resultados numéricos con los valores teóricos conocidos. La primera técnica está basada en la relación que existe entre el FIT y la energía de relajación G , la cual se calcula numéricamente considerando la expresión que la vincula con la variación de la energía potencial total. La segunda técnica se vale de la definición de la integral de contorno J y su relación con el FIT a través de la energía G . En ambos casos el estado tensional

se determina numéricamente mediante el método de los elementos finitos considerando estado plano de tensiones. Se evaluaron los modelos de grieta interna y grieta de borde para diferentes tamaños relativos de grieta y diferentes grados de refinamiento de la malla de elementos finitos, partiendo de una malla relativamente gruesa aumentando progresivamente el refinamiento en la región del extremo de la entalla.

Analizando los resultados numéricos, se destaca la buena precisión en el cálculo del FIT obtenida mediante la técnica de la integral de contorno J aun cuando se utilizan mallas relativamente gruesas. Por otro lado, los resultados obtenidos mediante el método de la energía G , aunque menos precisos que en el caso de la integral J , igualmente pueden considerarse aceptables inclusive para mallas gruesas. De esta manera se evidencia la ventaja de los métodos indirectos para el cálculo del FIT, especialmente la técnica basada en la integral J , ya que en ese caso pueden escogerse curvas de integración alejadas del extremo de la entalla aumentando la calidad de los resultados. Finalmente, también se observa en los resultados la verificación de la igualdad entre G y J cuando se utilizan mallas cada vez más densas.

REFERENCIAS

- [1] S. Chan, I. Tuba, and W. Wilson, "On the finite element method in linear fracture mechanics," *Engrg. Fracture Mech.*, vol. 2, pp. 1–17, 1970.
- [2] H. Liebowitz and E. Moyer, "Finite element methods in fracture mechanics," *Computers and Structures*, vol. 31, pp. 1–9, 1989.
- [3] R. Gallagher, "A review of finite element techniques in fracture mechanics," in *Proceedings of the 1st Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics*, 1978, pp. 1–25.
- [4] C. Daux, N. Moes, J. Dolbow, N. Sukumar, and T. Belytshko, "Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method," *Int. J. Numer. Method Engrg.*, vol. 48, pp. 1741–1760, 2000.
- [5] N. Sukumar, N. Moes, B. Moran, and T. Belytshko, "Extended finite element method for three-dimensional crack modeling," *Int. J. Numer. Method Engrg.*, vol. 48, pp. 1549–1570, 2000.
- [6] L. Bezerra, J. de Medeiros, F. Cesari, and P. Battistella, "Simple numerical technique using boundary element method for determination of k_i in fracture mechanics," in *Transactions SMiRT 16*, 2001, p. Paper 2047.
- [7] V. Saouma, "Lecture Notes in: Fracture Mechanics," University of Colorado Boulder, Tech. Rep., 2000.
- [8] G. Cherepanov, *Mechanics of Brittle Fracture*. New York: McGraw-Hill, 1979.
- [9] E. Oñate, *Structural Analysis with the Finite Element Method*. Barcelona: Springer, 2009, vol. 1.
- [10] K. Lawrence, "ANSYS Tutorial Release 9.0," Schroff Development Corporation, Tech. Rep., 2005.