

ANÁLISIS NUMÉRICO DE FLUJOS VISCOSOS INCOMPRESIBLES BIDIMENSIONALES APLICANDO SUBESCALAS

Lucas Giraldo^a, Walter Castelló^b, Carlos Sacco^c

^a*Departamento de Estructuras, Fabrica Argentina de Aviones “Brig San Martin” S.A., Av. Fuerza Aérea S/n, Córdoba, Argentina.*

^b*Departamento de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, CP 5000, Córdoba, Argentina.*

^c*Departamento de Mecánica de Fluidos, Instituto Universitario Aeronáutico, Av. Fuerza Aérea S/n, Córdoba, Argentina.*

Palabras clave: flujo incompresible viscoso, navier-stokes, subescalas, elementos finitos

Resumen. En este trabajo se presenta un código desarrollado sobre el método de elementos finitos que resuelve las ecuaciones de Navier – Stokes en flujo bidimensional, incompresible y turbulento. Se ha empleado un esquema de integración explícito para las ecuaciones que gobiernan el problema, para la solución se ha empleado un algoritmo de pasos fraccionados y se han considerado además dos formulaciones estabilizantes basadas en la teoría de subescalas: el método OSS (*Orthogonal sub-scales*) y el ASGS (*Algebraic sub-grid scales*). El esquema OSS consiste en la elección de un espacio de subescalas ortogonales, en este esquema se agregan términos ortogonales provenientes de los gradientes de presión y convectivo al espacio de elementos finitos de las velocidades. El esquema ASGS por otra parte resulta similar a los métodos tradicionales de estabilización. La modelización del flujo incompresible turbulento se basa en la descomposición de Reynolds, y se ha empleado un modelo simple del tipo *Large Eddy Simulation* en el cual se resuelven las ecuaciones de Navier – Stokes solo para las escalas mayores del flujo que son captadas por una malla que puede ser resulta por la capacidad computacional actual, y se modela la contribución al mismo de las escalas menores de turbulencia. Los resultados obtenidos en este trabajo han sido comparados con los obtenidos por otros autores y resultan satisfactorios, además se observa que el esquema de estabilización ortogonal (OSS) mejora significativamente los resultados y también resulta menos difusivo.

1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta un algoritmo para la solución de problemas de mecánica de fluidos, más precisamente las ecuaciones de Navier Stokes bidimensionales bajo régimen de flujo incompresible. Los esquemas de estabilización empleados aquí se basan en la teoría de subescalas, y se han implementado dos modelos diferentes para su posterior comparación. La lógica de programación empleada durante el desarrollo de este trabajo permite ir anexando nuevos esquemas de solución para estudiar otras condiciones de flujo como: flujos con turbulencia, flujos con rotación, estabilización para casos de rotación dominante, flujos debidos a gradientes térmicos, etc.

La solución de las ecuaciones de gobierno se hace recurriendo al método de elementos finitos, en donde las ecuaciones diferenciales del problema se transforman en ecuaciones algebraicas utilizando el método de residuos ponderados (Zienkiewicz y Taylor 2002 ; Cook et al. 2001 y Reddy J. N., 1993). En este método las expresiones integrales de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema, dan lugar a la aparición de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales cuya dimensión está definida por la cantidad de incógnitas que definen el dominio de análisis luego de su discretización en elementos finitos.

El algoritmo de integración de las ecuaciones de gobierno empleado en este trabajo es un esquema de pasos fraccionados del tipo Euler forward, o explícito, de primer orden de precisión en el tiempo. El sistema de ecuaciones que gobierna los problemas de flujo incompresible ha sido estabilizado empleando dos algoritmos: (a) un esquema de estabilización del tipo ortogonal denominado OSS (Orthogonal Sub-Scale), y (b) un esquema más simple denominado ASGS (Algebraic Sub-Grid Scale); ambos métodos están basados en la teoría de subescalas cuyo origen se remonta al trabajo de Hughes (2004).

El código computacional que se ha implementado permite tratar las condiciones de contorno habituales sobre las incógnitas nodales (velocidad y presión), y además es posible definir algunas condiciones de contorno especiales como la de tensión nula en las regiones de contacto con cuerpos sólidos. Se ha implementado también un modelo de turbulencia simple, de cero ecuaciones de transporte, para tratar problemas que presenten flujo turbulento.

El preproceso y la visualización de resultados se hace utilizando el software GiD©. Este artículo está basado en el trabajo de Giraldo (2010) en donde se desarrolla con mayor profundidad el tema.

El contenido de este trabajo es el que se resume a continuación. En la Sección 2 se presenta el esquema de integración explícito utilizado para obtener la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo viscoso incompresible. Luego en la Sección 3 se proponen los algoritmos de estabilización necesarios para obtener una solución correcta del problema. Algunos ejemplos numéricos se presentan en la Sección 4. Para resumir los resultados mas destacados, en la Sección 5 se presentan las conclusiones.

2 ESQUEMA DE PASOS FRACCIONADOS APLICADO AL PROBLEMA DE FLUJO INCOMPRESIBLE

La solución de las ecuaciones de Navier Stokes incompresible se realiza empleando un esquema de pasos fraccionados con integración temporal explícita. Bajo este procedimiento, la estabilidad de la presión depende del tamaño del paso de tiempo, Si el δt es muy pequeño, se puede incurrir en problemas de estabilización. Es por eso que para esquemas de primer orden es adecuado que se tome un δt cercano al paso de tiempo crítico, como en Codina (2001). La ecuación de Poisson para las presiones se utiliza como complemento de las ecuaciones de momento, al depender esta del campo de velocidades del problema ya

discretizado trae problemas de estabilidad, que deben ser resueltos con alguna técnica específica. Se ha empleado esta formulación dado que permite trabajar con las mismas funciones de aproximación para interpolar la presión y la velocidad a nivel elemental, lo cual resulta en una ventaja al momento de la implementación computacional.

La ventaja del método propuesto en este trabajo con respecto a los métodos implícitos convencionales de integración de las ecuaciones gobierno para flujo incompresible, reside en la eficiencia computacional de la integración explícita asociada a la solución de sistemas lineales de menor tamaño. Esto disminuye la necesidad de emplear algoritmos iterativos en la solución del sistema de ecuaciones, y en el esquema que se ha propuesto se resuelve únicamente la ecuación de Poisson a través de un esquema de Gradientes Conjugados de manera implícita.

Se considera a un dominio de análisis Ω perteneciente a \mathbb{R}^2 , con un contorno definido por una línea cerrada Γ . Entonces las ecuaciones de Navier-Stokes en flujo incompresible para un fluido evolucionando en este dominio Ω , para un intervalo de tiempo $[0, T]$, son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{u\} + (\{u\} \cdot \nabla) \{u\} - \nu \Delta \{u\} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= 0 \\ \nabla \cdot \{u\} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\{u\}$ es el campo de velocidades sobre Ω , p es la presión estática, ν es la viscosidad cinemática y ρ es la densidad.

Además el la definición del problema se complementa con una serie de condiciones iniciales sobre la velocidad y la presión, y otras condiciones que deben cumplirse sobre el contorno, según:

$$\begin{aligned} \{u\} &= \{\bar{u}_0\} & y & \quad p = \bar{p}_0 & \quad en & \quad t = t_0 \\ \{u\} &= \{\bar{u}\} & & & \quad en & \quad \Gamma_{Dv} \\ p &= \bar{p} & [\sigma] \cdot \{n\} &= \{\bar{t}\} & \quad en & \quad \Gamma_{Nv} \\ \{u\} \cdot \{n\} &= \{\bar{u}_n\}, & [\sigma] \cdot \{g_1\} &= \{\bar{t}_1\} & \quad en & \quad \Gamma_{Mv} \end{aligned} \quad (2)$$

donde la barra sobre las variables significa que son conocidas, y donde $[\sigma]$ es el tensor de tensiones del fluido.

La línea cerrada que define al contorno Γ se considera separada en tres componentes disjuntos Γ_{Dv} , Γ_{Nv} , y Γ_{Mv} . La primera de ellas es la componente donde se especifican las condiciones sobre la variable principal $\{u\}$ (Dirichlet); la segunda componente contiene las variables secundarias (Neumann), y la tercera componente es la parte donde se imponen las condiciones mixtas de velocidad normal y tensiones tangenciales. El versor $\{n\}$ es normal al contorno y el versor $\{g_1\}$ genera el espacio tangente a Γ_{Mv} .

El método de elementos finitos permite tratar de manera diferenciada la discretización espacial, y la temporal cuando el problema es dependiente del tiempo. En el caso de la discretización espacial los campos de velocidad y presión son interpolados dentro de cada elemento a partir de los valores nodales empleando funciones de forma predefinidas. Por otra parte en la discretización temporal se hace uso de un esquema de diferencias finitas, regla del trapecio, para establecer el cambio de las magnitudes en la medida que evolucionan en el tiempo. Finalmente se obtiene la forma matricial de la discretización monolítica del problema, equivalente al conjunto de ecuaciones (1), según:

$$\frac{1}{\partial t} [M] (\{u^{n+1}\} - \{u^n\}) + [K_c(u^{n+\theta})] \{u^{n+\theta}\} + [K_c] \{u^{n+\theta}\} - \frac{1}{\rho} [G^*] \{p^{n+1}\} = 0 \quad (3)$$

$$[D] \{u^{n+1}\} = 0 \quad (4)$$

siendo $\{u^{n+\theta}\}$ el vector de velocidades en los nodos de la malla en el paso de tiempo $n + \theta$. El parámetro θ varía entre 0 y 1, vale 0 para un esquema del tipo Euler hacia adelante o explícito, por otra parte cuando vale 1 se tiene un esquema tipo Euler hacia atrás o implícito, y en el caso especial cuando vale $\frac{1}{2}$ se obtiene un esquema del tipo Crank-Nicolson de segundo orden). Las matrices y vectores globales en las ecuaciones (3)-(4) se obtienen a partir del ensamble de las siguientes matrices elementales:

$$[M_e] = \int_{\Omega_e} [N]^T [N] d\Omega_e \quad \text{Matriz de Gramm del elemento.}$$

$$[K_c(u_e^{n+\theta})] = \int_{\Omega_e} [N]^T [u_e^{n+\theta}] [B] d\Omega_e \quad \text{Matriz de convección del elemento.}$$

$$[K_{ve}] = \int_{\Omega_e} [B]^T [C] [B] d\Omega_e \quad \text{Matriz de difusión del elemento.}$$

$$[G_e^*] = \int_{\Omega_e} \{N_{,fis}\} [N_p] d\Omega_e \quad \text{Matriz asociada al } \nabla p \text{ sobre el elemento.}$$

$$[D_e^*] = [G_e^*]^T \quad \text{Matriz asociada a la } \nabla \cdot \{u\} \text{ en el elemento.}$$

en donde $[N]$ es la matriz de funciones de forma de interpolación para la velocidad, $[u_e^{n+\theta}]$ es la matriz de valores nodales de la velocidad en el tiempo $n + \theta$, $[C]$ es la matriz constitutiva asociada a la viscosidad μ , $[B]$ es la matriz de derivadas de las funciones de interpolación respecto de las coordenadas físicas, $\{N_{,fis}\}$ es un reordenamiento de $[B]$ tal que:

$$[N_{,fis}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{Nn}}{\partial x} & \frac{\partial N_{Nn}}{\partial y} \end{bmatrix}_{1 \times 2Nn}^T$$

con Nn el número de nodos del elemento, y $[N_p]$ la matriz de funciones de interpolación elemental para la presión.

La aplicación del método de pasos fraccionados al problema discreto (3)-(4) implica considerar una nueva variable con características de velocidad, denominada velocidad intermedia o momento fraccionado $\{\bar{u}\}$, con la cual se divide la ecuación de momento. Además en este esquema se reemplaza la ecuación de continuidad por una ecuación de Poisson que relaciona el cambio en la presión debido al cambio en la velocidad.

Luego de realizar algunas aproximaciones esenciales, ver [Codina \(2001\)](#), y tomando $\theta = 0$ de manera que se recupera el esquema de integración explícita, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{1}{\partial t} [M] (\{\bar{u}^{n+1}\} - \{u^n\}) + [K_c(\bar{u}^{n+\theta})] \{\bar{u}^{n+\theta}\} + [K_c] \{\bar{u}^{n+\theta}\} - \gamma \frac{1}{\rho} [G^*] \{p^{n+1}\} = 0 \quad (5)$$

$$\partial t[L]\left(\{p^{n+1}\} - \gamma\{p^n\}\right) = -\rho[D^*]\{\bar{u}^{n+1}\} \quad (6)$$

$$\frac{1}{\partial t}[M]\left(\{u^{n+1}\} - \{\bar{u}^n\}\right) - \frac{1}{\rho}[G^*]\left(\{p^{n+1}\} - \gamma\{p^n\}\right) = 0 \quad (7)$$

siendo γ un parámetro que puede valer 0 ó 1, en este caso (integración de pasos fraccionados de primer orden) se toma cero y se mantiene el orden del error de integración $O(\partial t)$.

3 ALGORITMO DE ESTABILIZACIÓN

En este trabajo se han utilizado dos algoritmos de estabilización, sobre la base de un esquema de una misma teoría: en primer lugar se ha implementado un esquema de estabilización de subescalas ortogonales (OSS) y en segundo lugar la estabilización por aproximación algebraica de subescalas (ASGS), se puede consultar el trabajo de [Codina \(2000\)](#) para tener una mayor claridad sobre estos esquemas. El esquema OSS es la estabilización a través las proyecciones ortogonales del gradiente de presión y del término convectivo. En este método se agregan a las ecuaciones variacionales del problema dos términos provenientes del mínimo cuadrado de: (a) la diferencia entre el gradiente de presión y su proyección ortogonal sobre el espacio discreto, y (b) la diferencia entre el término convectivo y su proyección ortogonal sobre el espacio discreto. El esquema ASGS, por otra parte resulta muy similar al método Galerkin/Least-Squares (GLS), con lo cual resulta mas simple de implementar.

Para el algoritmo OSS, el sistema matricial resultante es el siguiente:

$$\frac{1}{\partial t}[M]\left(\{\bar{u}^{n+1}\} - \{u^n\}\right) + [K_c(\bar{u}^{n+\theta})]\{\bar{u}^{n+\theta}\} + [K_c]\{\bar{u}^{n+\theta}\} + [K_{STAB(\bar{u}^n)}]\{\bar{u}^n\} = \{f_{stab(\bar{u}^n, \Pi^n)}\} \quad (8)$$

$$\partial t[L]\{p^{n+1}\} + \tau[L]\left(\{p^{n+1}\} - [D]\{\Xi^n\}\right) = -\rho[D^*]\{\bar{u}^{n+1}\} \quad (9)$$

$$\frac{1}{\partial t}[M]\left(\{u^{n+1}\} - \{\bar{u}^n\}\right) - \frac{1}{\rho}[G^*]\{p^{n+1}\} = 0 \quad (10)$$

$$\{\Pi^{n+1}\} = [M]^{-1}\{RHS_\pi(\bar{u}^{n+})\} \quad (11)$$

$$\{\Xi^{n+1}\} = [M]^{-1}[\bar{G}]\{p^{n+1}\} \quad (12)$$

en donde τ es el parámetro de estabilización, $[L]$ es la matriz Laplaciana (contiene derivadas segundas de las funciones de forma elementales respecto de las coordenadas físicas), $[M]$, $[\bar{G}]$ y $[\bar{D}]$ las matrices de masa, gradiente y divergencia asociadas a la variables. $\{\Xi\}$ es el vector de proyección del ∇p sobre el espacio de elementos finitos y $\{\Pi\}$ es la variable de proyección asociada a la estabilización de la convección para los nodos de todo el sistema.

Para el algoritmo ASGS, el sistema matricial que se obtiene es el siguiente:

$$\frac{1}{\partial t}[M]\left(\{\bar{u}^{n+1}\} - \{u^n\}\right) + [K_c(\bar{u}^{n+\theta})]\{\bar{u}^{n+\theta}\} + [K_c]\{\bar{u}^{n+\theta}\} + [K_{STAB(\bar{u}^n)}]\{\bar{u}^n\} = 0 \quad (13)$$

$$\partial t[L]\{p^{n+1}\} + \tau[L]\left(\{p^{n+1}\}\right) = -\rho[D^*]\{\bar{u}^{n+1}\} \quad (14)$$

$$\frac{1}{\partial t} [M] \{ \bar{u}^{n+1} \} - \{ \bar{u}^n \} - \frac{1}{\rho} [G^*] \{ p^{n+1} \} = 0 \quad (15)$$

A nivel elemental se tiene:

$$\begin{aligned} [K_{STAB}(\bar{u}^{n+\theta})] &= \tau \int_{\Omega_e} [B]^T [\bar{u}^{n+\theta}]^T [B] d\Omega_e && \text{Matriz de Estabilización de Convección Elemental.} \\ \{ f_{stab}(\bar{u}^{n+\theta}, \pi^n) \} &= \int_{\Omega_e} [B]^T [\bar{u}^{n+\theta}]^T \tau [N] \{ \pi_e^n \} d\Omega_e && \text{Vector de Estabilización de Convección Elemental.} \\ \{ RHS_\pi \} &= \int_{\Omega_e} [N]^T \left[\nabla \{ \bar{u}^{n+1} \} \right] [N] \{ \bar{u}_e^{n+1} \} d\Omega_e && \text{Término independiente de la ecuación para } \{ \pi \}. \end{aligned}$$

siendo $\left[\nabla \{ \bar{u}^{n+1} \} \right]$ la matriz 2x2 de derivadas de las componentes de $\{ \bar{u}^{n+1} \}$ respecto de las coordenadas físicas.

Los algoritmos de solución de los sistemas (8)-(12) y (13)-(15) se resuelven en la secuencia que han sido presentados, para cada salto de tiempo.

4 RESULTADOS OBTENIDOS

4.1 Flujo viscoso inestacionario alrededor de un cilindro

Un ejemplo clásico de separación de capa límite y formación de vórtices que interactúan con la estela desarrollada atrás de un cuerpo romo, es el flujo alrededor de un cilindro. Dicho ejemplo resulta fundamental para evaluar el comportamiento de algoritmos de integración de las ecuaciones de Navier-Stokes sobre problemas no estacionarios, ya que se cuenta con datos muy precisos sobre dicho fenómeno oscilatorio. Por ello, este ejemplo permite estudiar el comportamiento del esquema numérico desarrollado en este trabajo.

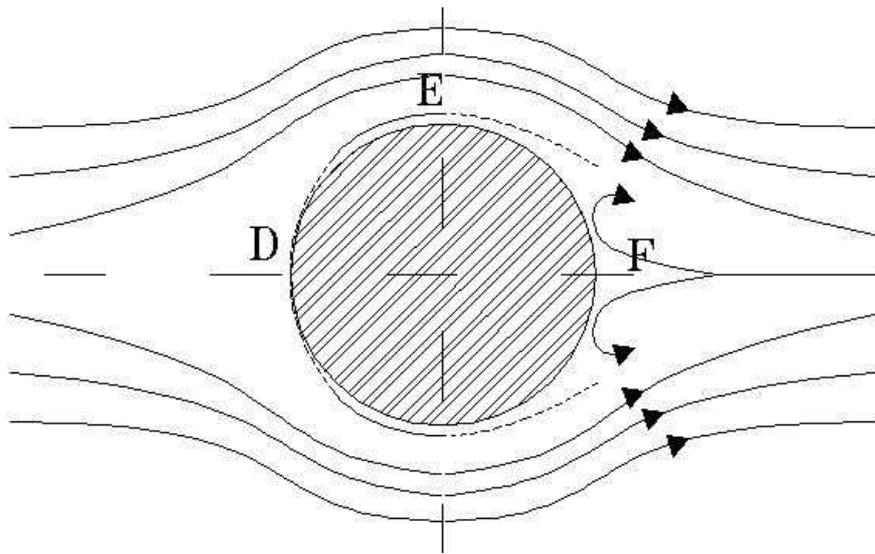


Figura 1: Esquema de Flujo viscoso alrededor de un cilindro

El fenómeno producido por el flujo viscoso alrededor del cilindro puede interpretarse considerando la Figura 1. Al aumentar la velocidad del flujo, se incrementa la fuerza de

fricción que se opone al movimiento de la partícula dentro de la capa límite, y la partícula consume energía cinética en su trayectoria desde D a E. Luego, el remanente de energía resulta insuficiente para vencer el gradiente de presión adverso en el desplazamiento de E a F, y las fuerzas de presión hacen que la partícula se desvíe de su trayectoria y se mueva en dirección opuesta. Esto origina la formación de un vórtice, el cual incrementa su tamaño y termina por separarse del cilindro, moviéndose aguas abajo en el fluido.

En el estado de régimen, se observan vórtices que giran en sentido horario y antihorario, desprendiéndose desde arriba y abajo del cilindro respectivamente. Estos últimos generan una zona de succión por detrás del cilindro, lo cual aumenta la resistencia del mismo.

A una determinada distancia del cilindro, se observa una trayectoria regular de vórtices que se mueven alternadamente en sentido horario y antihorario conocida como *calle de vórtices de Karman*. Se sabe que se produce un desprendimiento regular de vórtices para un rango de números de Reynolds, basados en el diámetro del cilindro, que va desde 60 hasta 5000. Cuando $Re < 60$, las perturbaciones son amortiguadas y la estela conserva una forma laminar, para números Re mayores a 5000 la estela resulta una mezcla totalmente turbulenta, como se explica en [Fox \(1985\)](#) y [Schlichting \(1969\)](#).

Mediciones experimentales demuestran que la frecuencia depende únicamente del número de Reynolds para el caso de un cilindro, en el rango de formación de la calle de vórtices de Karman.

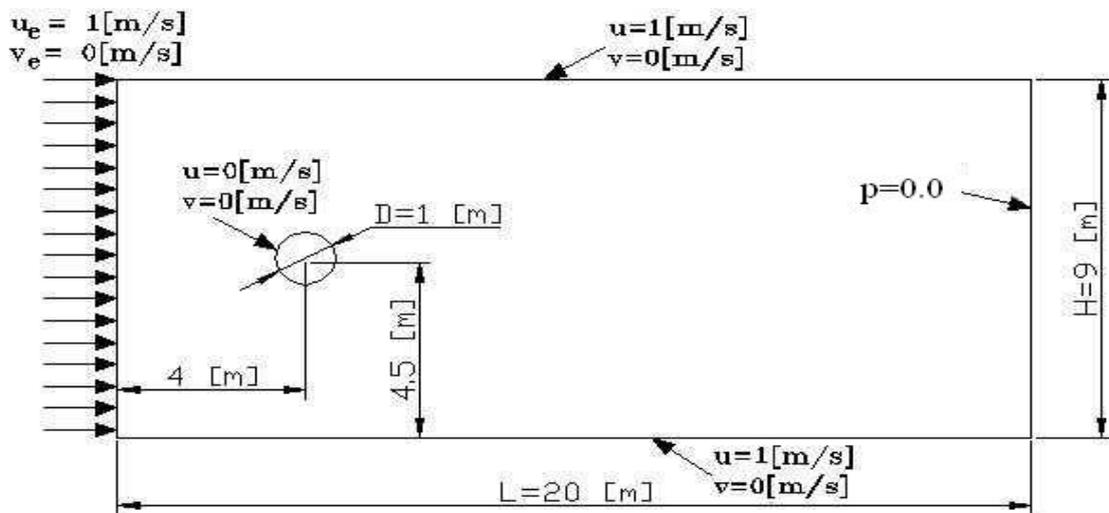


Figura 2: Condiciones de contorno en problema de flujo viscoso alrededor de un cilindro.

El número de Reynolds se calcula en base al diámetro del cilindro y la velocidad del flujo sin perturbar (velocidad de entrada). Se toma el sistema internacional de unidades para este caso por lo que las longitudes se expresan en metros. Se adoptan los siguientes valores:

$$\rho = 1 \left[\frac{kg}{m^3} \right] \quad \mu = 0.01 \left[\frac{kg}{m \cdot s} \right] \quad u_e = 1 \left[\frac{m}{s} \right] \quad D = 1 [m]$$

para la densidad del fluido ρ , la viscosidad dinámica μ , la velocidad de entrada u_e y el diámetro del cilindro D .

El número de Reynolds resulta:

$$Re = \frac{\rho u_e D}{\mu} = 100$$

El dominio utilizado y las condiciones de contorno para el problema pueden verse en la Figura 2. Se define la velocidad en la sección de entrada, el contorno superior y el inferior, la condición de presión $p = 0 [Pa]$, la cual permite recortar el dominio del flujo, y la condición de no deslizamiento en contorno del cilindro.

En la simulación se utilizó una malla de 14389 nodos y 28118 elementos triangulares lineales (ver Figura 3), se requirió de 30000 iteraciones y 1 hs de trabajo en un ordenador con procesador Intel Core 2 Duo de 3.0 Ghz, para lograr el desprendimiento oscilatorio estacionario de vórtices y para la obtención de velocidades y presiones.

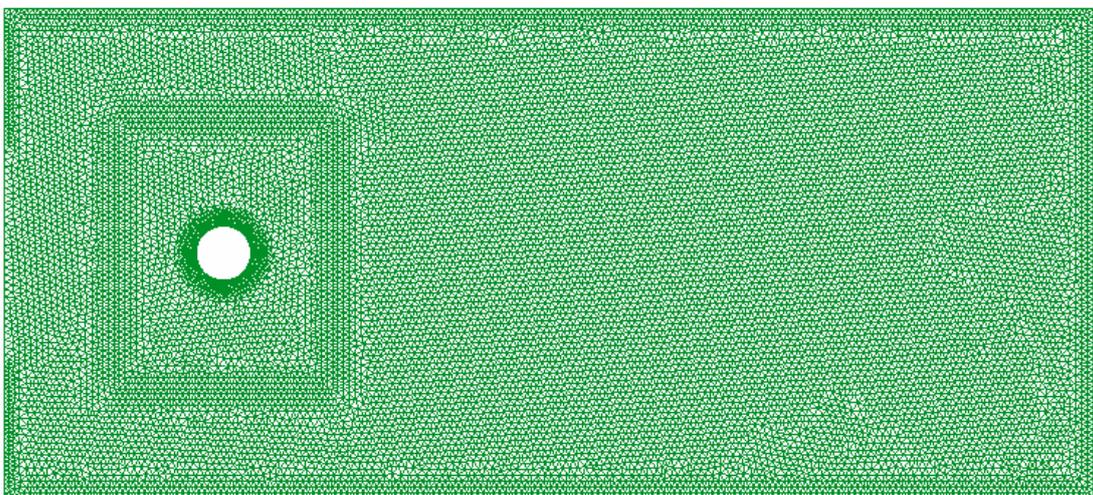


Figura 3: Mallado del dominio sobre el problema del flujo viscoso alrededor de un cilindro.

Los resultados de coeficientes de fuerza lateral (sustentación) debido a la presión y de coeficiente de arrastre debido únicamente a la presión para ambos métodos pueden verse en la Figura 4 y la Figura 5.

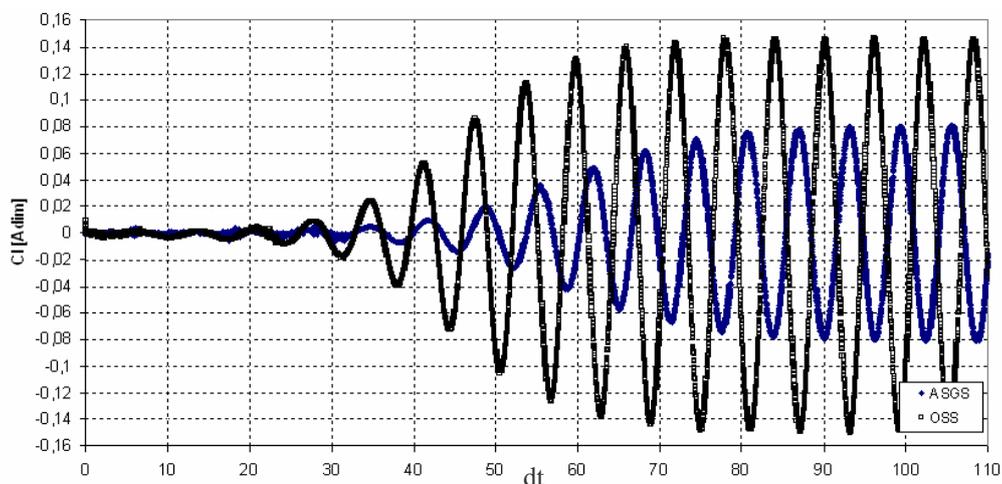


Figura 4: Variación en el tiempo adimensional del coeficiente de fuerza lateral debida a presión para flujo alrededor de un cilindro.

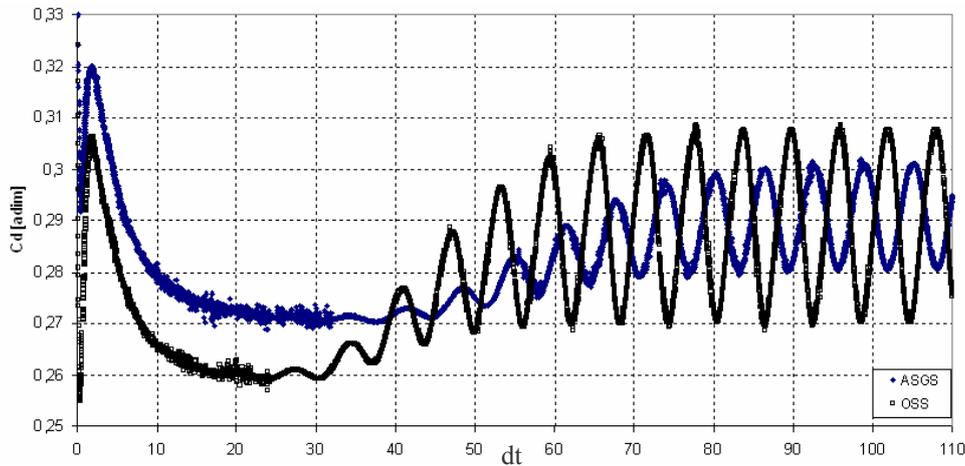


Figura 5: Variación en el tiempo adimensional del coeficiente de arrastre debido a presión para flujo alrededor de un cilindro.

Dichos coeficientes adimensionales se obtuvieron como el cociente de los valores de fuerza de presión según el eje vertical (sustentación) y horizontal (arrastre) resultantes, divididos por $\rho u_e D/2$. Si se observan los gráficos de la Figura 4 y Figura 5 se desprende que las fuerzas mantienen la forma sinusoidal para los dos métodos de estabilización. Según [Schlichting \(1969\)](#) el período de oscilación en la fuerza lateral para el caso de $Re=100$ resulta $T = 5.98$ [s], siendo la frecuencia asociada $f = 0.167$ [Hz]. En el caso del método OSS el período resultó $T = 5.94$ [s], un 0.68% inferior al valor de referencia. En el caso del método ASGS el período resultó $T = 6.00$ [s], un 0.33% superior al valor de referencia. El período en el caso de fuerza de arrastre resulta la mitad del valor del período de fuerza lateral.

En la Figura 6, Figura 7 y Figura 8 pueden verse los contornos de velocidades, presiones y vectores de velocidad detrás del cilindro para un tiempo de simulación de $t = 280$ [s], obtenidas usando el método OSS.

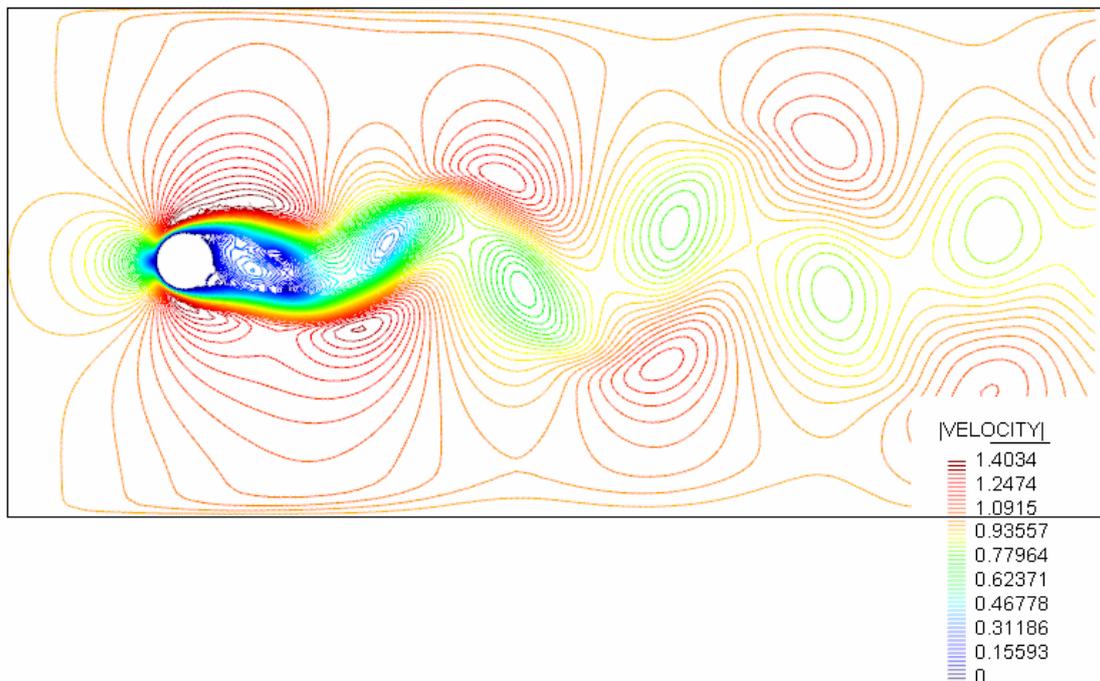


Figura 6: Contornos de velocidad $[m/s]$, para un tiempo $t = 280$ [s] (método de estabilización OSS).

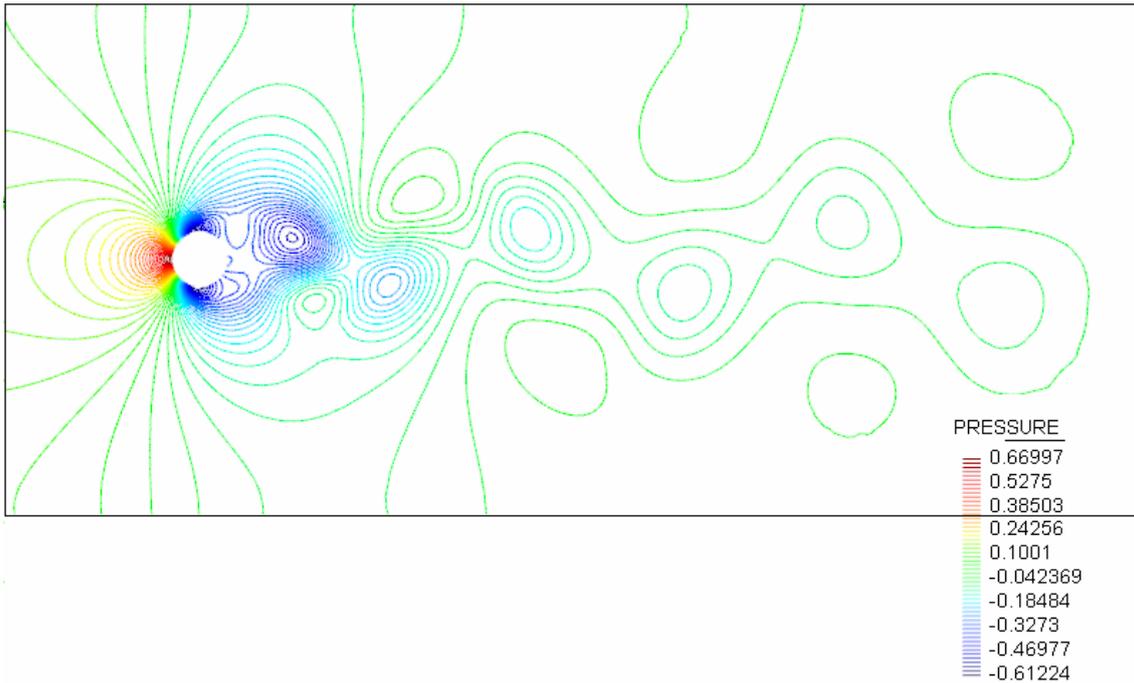


Figura 7: Contornos de presión en $[Pa]$, para un tiempo de $t = 280[s]$ (método de estabilización OSS).

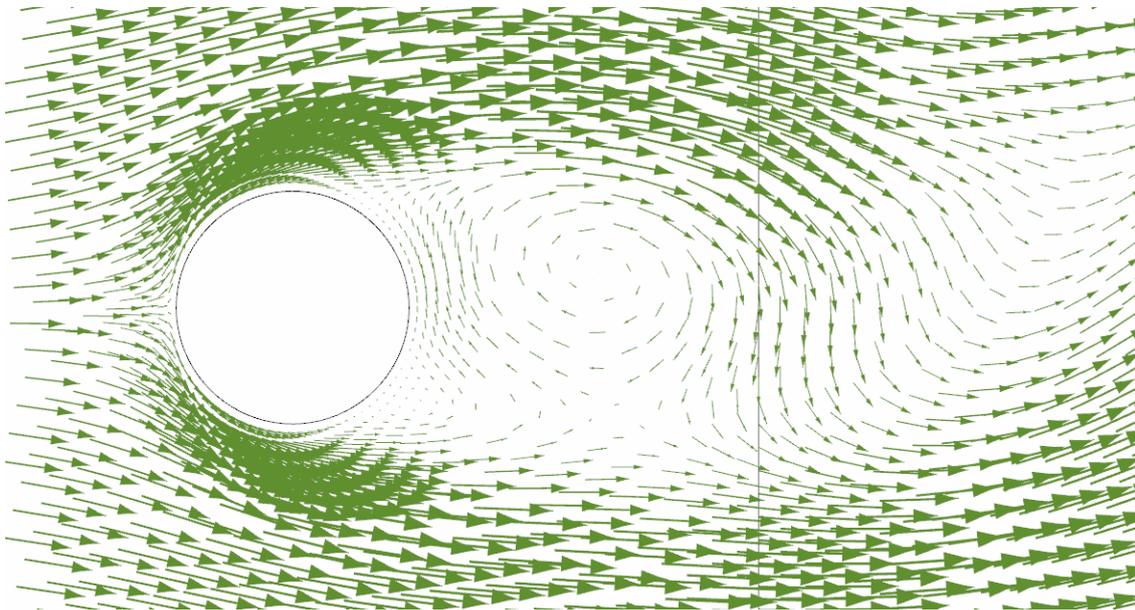


Figura 8: Vectores de velocidad para un tiempo $t = 280[s]$ (método de estabilización OSS).

4.2 Flujo confinado en una cavidad a $Re=5000$

Este es un típico ejemplo para evaluar el comportamiento de algoritmos que resuelva flujos viscosos incompresibles. Un flujo viscoso está confinado en una cavidad cuadrada mientras uno de los bordes se desliza tangencialmente. Las condiciones de borde para la velocidad y la presión, se muestran en la Figura 9.

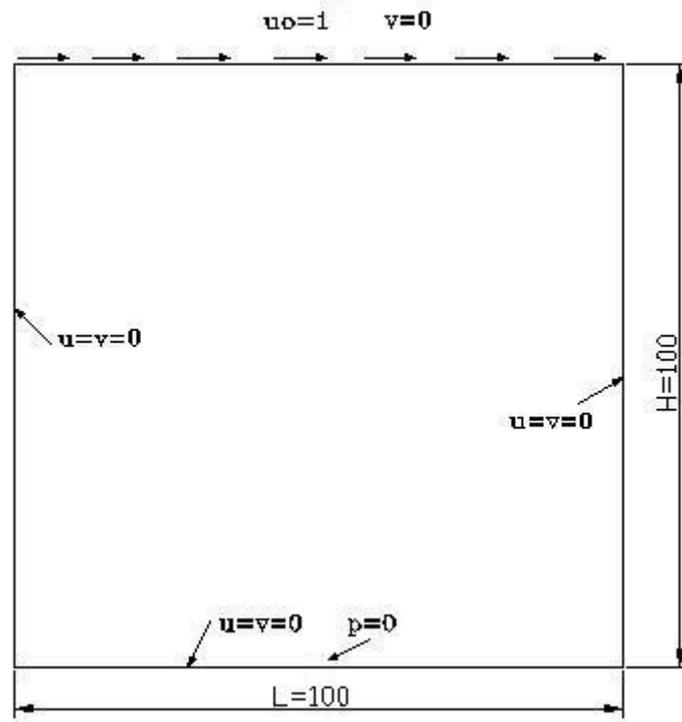


Figura 9: Flujo confinado en una cavidad.

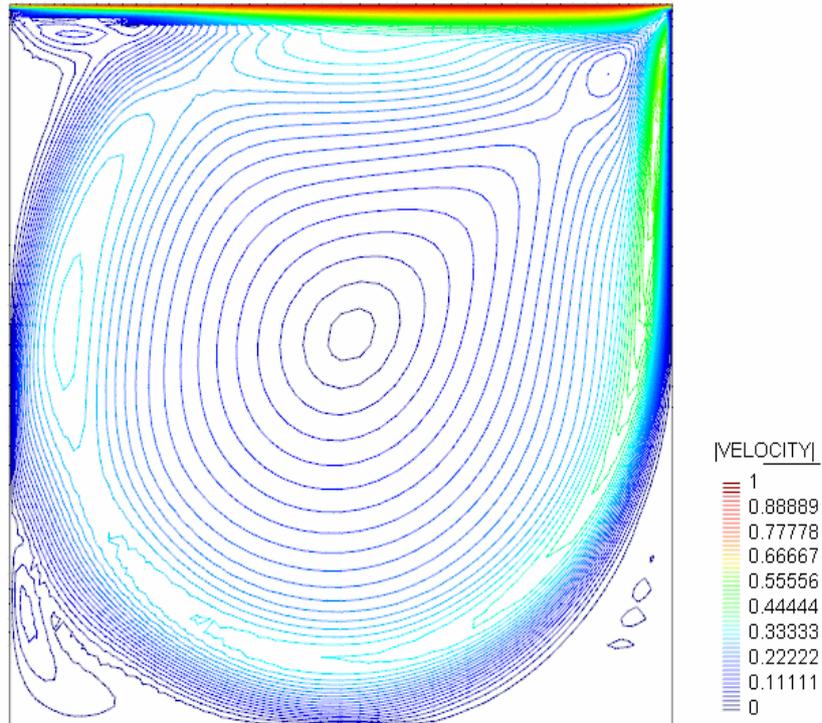


Figura 10: Contornos de velocidad para el fluido confinado en una cavidad.

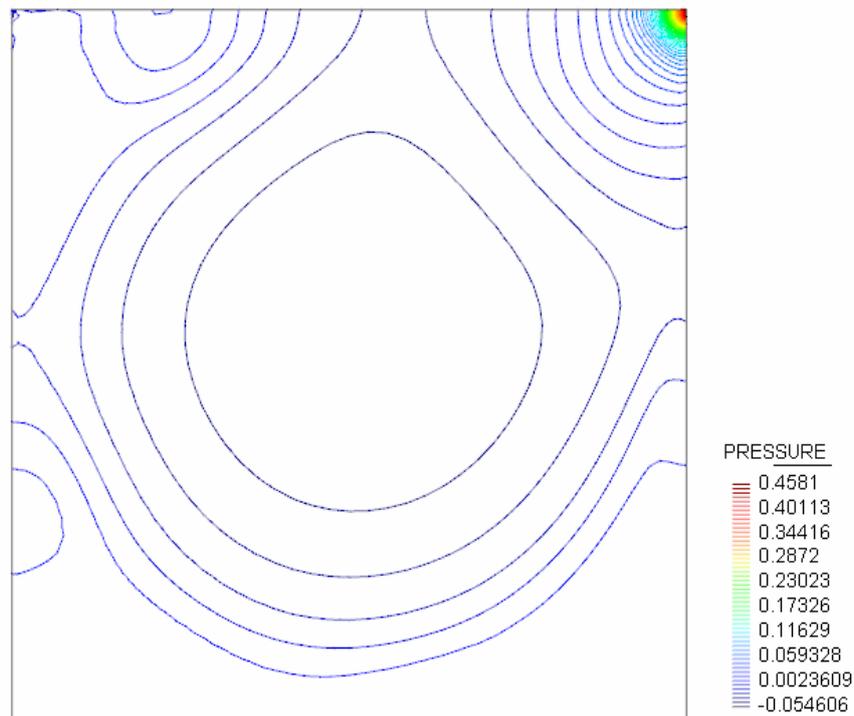


Figura 11: Contornos de presión para el fluido confinado en una cavidad.

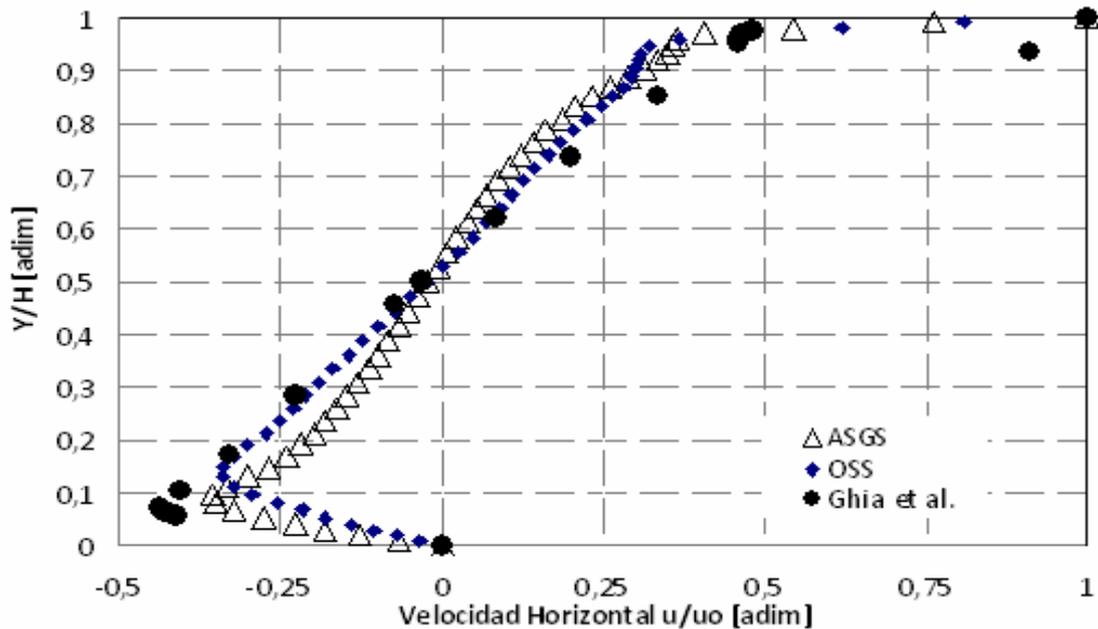


Figura 12: Comparación de resultados de velocidad horizontal sobre el plano medio vertical de la cavidad.

Los contornos de velocidad y presión se presentan en la Figura 10 y en la Figura 11, respectivamente. La comparación de resultados con los datos aportados por el trabajo experimental de [Ghia et al., \(1982\)](#), muestra una concordancia satisfactoria, tal como puede observarse para velocidades horizontales en función de la altura en el plano medio vertical, Figura 12.

4.3 Flujo viscoso alrededor de un perfil NACA 008 a muy bajo Reynolds.

En este ejemplo se efectúa una comparación de la características de sustentación y resistencia para un perfil NACA 0008 a $Re=2000$. Se comparan los resultados obtenidos empleando el esquema propuesto en este trabajo, con los establecidos por Peter Kunz y Ilan Kroo como parte de los estudios efectuados en el proyecto de desarrollo de microvehículos aéreos de la universidad de Stanford (E.E.U.U) y presentados en [Roshko \(1954\)](#).

Para el análisis de perfiles a muy bajo Re estos investigadores utilizaron un software de solución de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresible por el método de diferencias finitas similar a al de [Rogers y Kwak \(1990\)](#). Para el estudio se utilizaron dimensiones generales (en metros) del dominio y condiciones de contorno prescriptas, las cuales pueden verse en la Figura 13.

Como propiedades del flujo se tomaron $\rho = 1 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$ y $\mu = 5 \cdot 10^{-4} \left[\frac{kg}{m \cdot s} \right]$

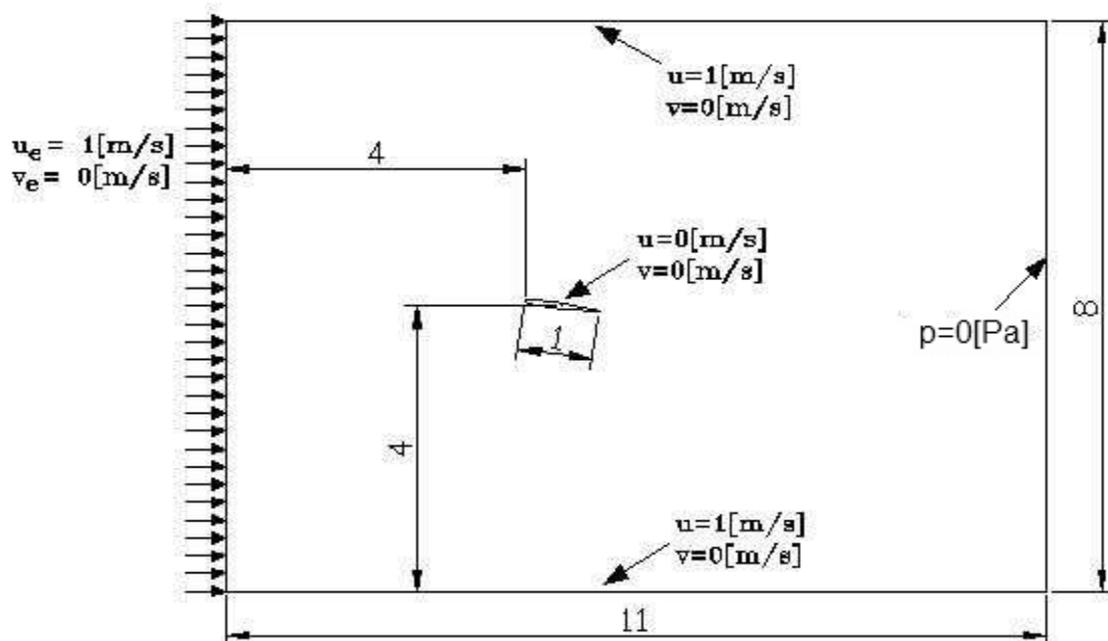


Figura 13: Condiciones de contorno sobre el dominio de estudio del perfil NACA 0008.

En la sección de entrada se dio un valor de velocidades horizontales de $u_e = 1 [m/s]$ y velocidad vertical nula, al igual que en los contornos superiores e inferior. En la sección de salida se impone una condición de presión nula. Sobre el contorno del perfil se prescribió la condición de no deslizamiento.

El dominio se discretizó usando una malla de 48170 elementos y 24371 nodos, los tamaños de los elementos aumentan en la medida que se alejan de la posición del perfil. No se ha empleado una malla estructurada en las cercanías del perfil, sin embargo se ha forzado un tamaño de elementos pequeño en esta parte de la malla tal como se observa en la Figura 14.

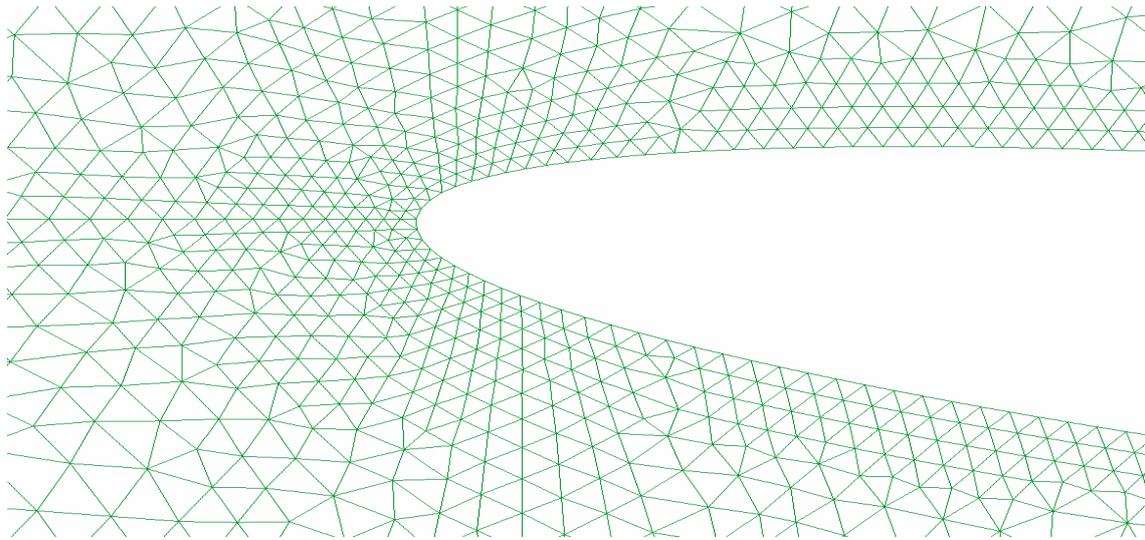


Figura 14: Detalle de malla alrededor del punto de segregación.

La característica de disminución del pico de presión, y por ende del gradiente adverso de presiones, anteriormente comentado puede verse para el perfil $\alpha = 0^\circ$ en la Figura 15. Además puede observarse que no hay recuperación de presión en el borde de fuga, debido al gran espesor que ha desarrollado la capa límite en dicha zona y esto se traduce para el flujo sin perturbar en un incremento aparente del espesor del perfil.

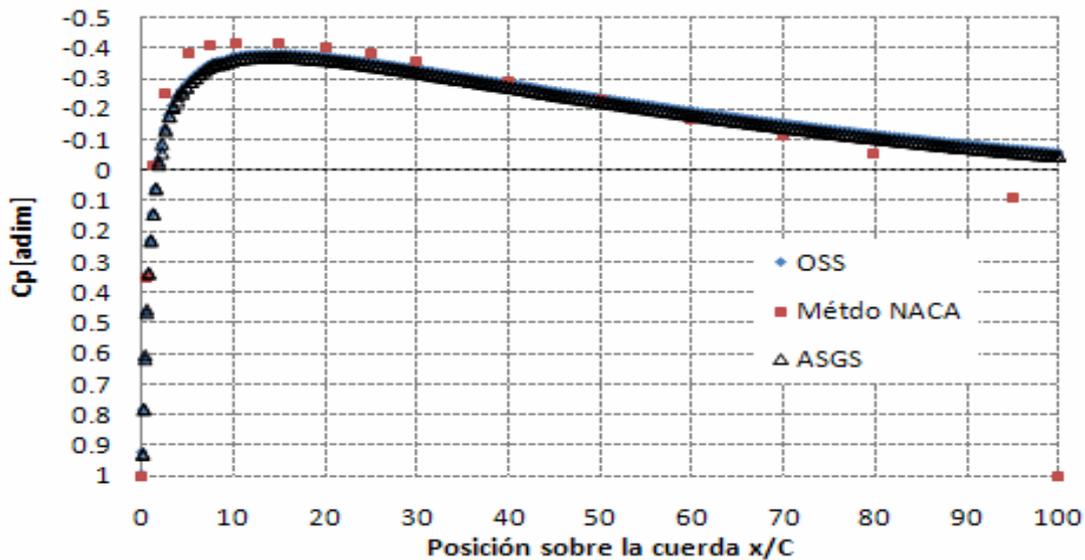


Figura 15: Valores del coeficiente de presión obtenidos en perfil NACA 008 para $\alpha = 0^\circ$.

En la Figura 16 y Figura 17 pueden verse los contornos de velocidad para ángulos de ataque entre 0° y 8° , y también en la Figura 18 se presenta la extensión de la zona de pérdida sobre extradós para 6° a partir de los vectores de velocidad. En la Figura 19 y Figura 20 pueden verse los contornos de presión para el ángulo de ataque estudiado. En éstas últimas figuras puede verse claramente que para un ángulo de 8° la formación de la calle de vórtices de Karman sobre le estela.

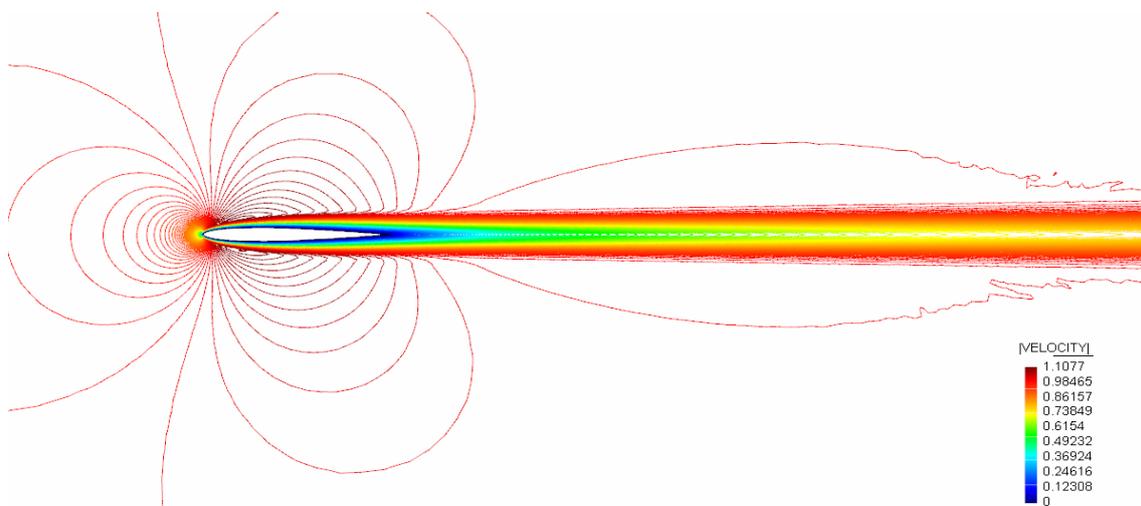


Figura 16: Contornos de velocidad obtenidos en perfil NACA 0008 para $\alpha = 0^\circ$.

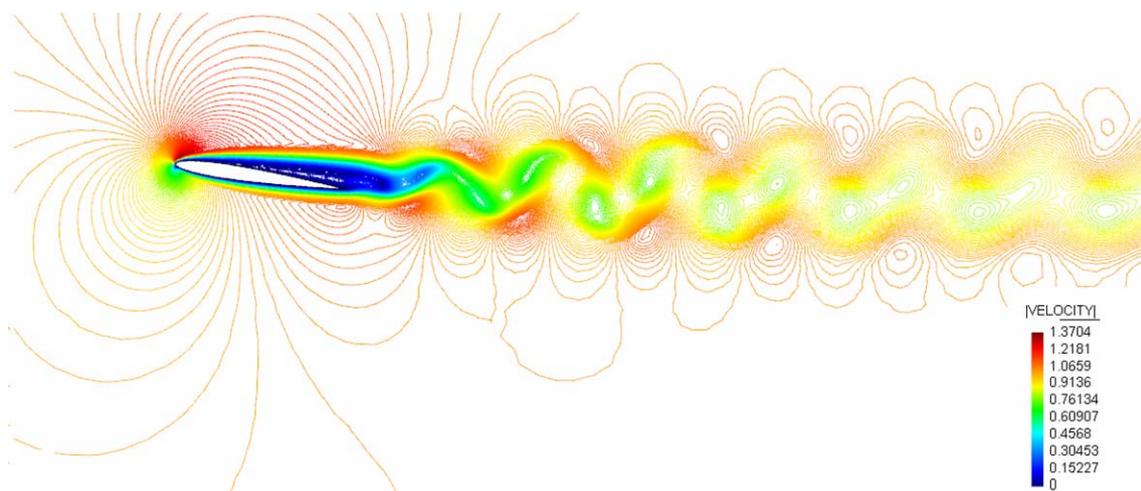


Figura 17: Contornos de velocidad obtenidos en perfil NACA 0008 para $\alpha = 8^\circ$.

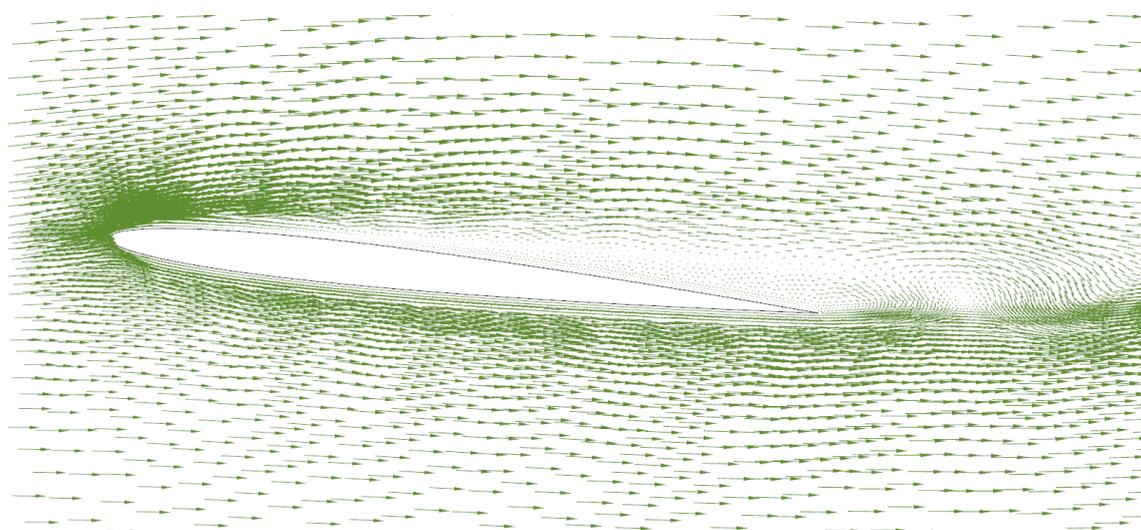


Figura 18: Vectores de velocidad obtenidos en perfil NACA 0008 para $\alpha = 6^\circ$. Se distingue sobre el extradós la zona de desprendimiento.

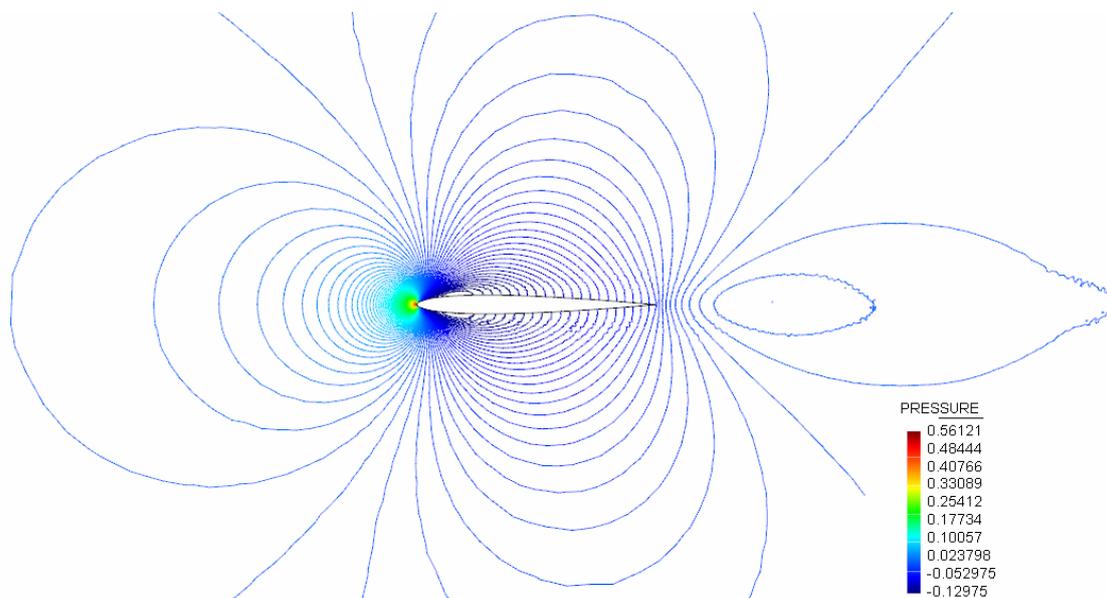


Figura 19: Contornos de presión obtenidos en perfil NACA 0008 para $\alpha = 0^\circ$.

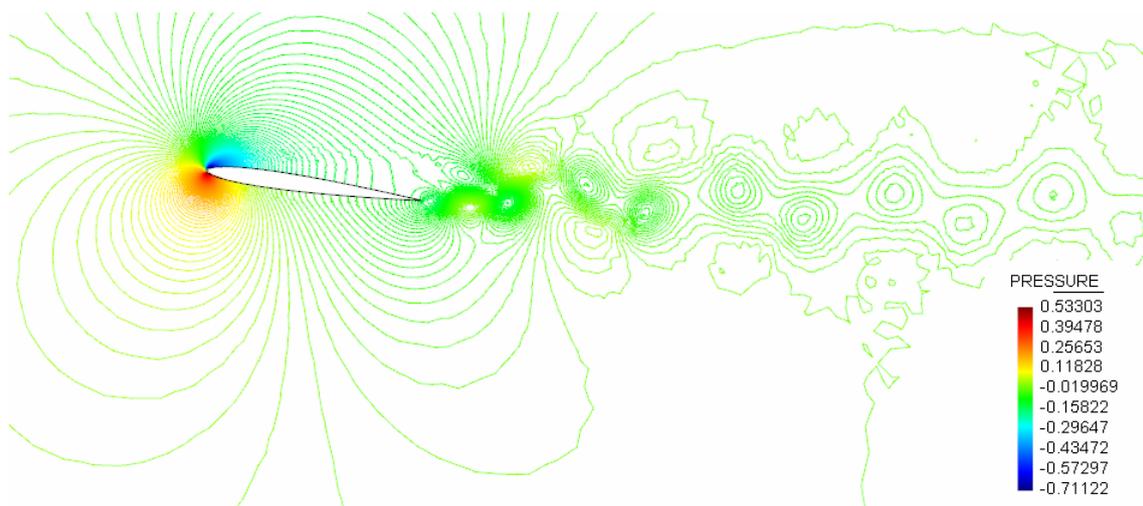


Figura 20: Contornos de velocidad obtenidos en perfil NACA 0008 para $\alpha = 8^\circ$.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha implementado un esquema de solución de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo bidimensional incompresible, donde la línea principal del estudio en este trabajo ha sido la utilización de un método de estabilización que agregue viscosidad artificial de manera controlada y precisa. Se han evaluado dos métodos, uno consiste en agregar difusión artificial sobre la dirección ortogonal en los términos convectivos y de presión (OSS), y el otro consiste en adicionar de una manera más directa la difusión artificial sobre los términos de convección y presión (ASGS).

Para ambos métodos se obtuvieron muy buenos resultados en problemas donde domina la difusión y así como en problemas donde el flujo convectivo es el dominante. Se observa que el método ASGS resulta más difusivo que el OSS, básicamente esto se debe a la manera en que se introduce la viscosidad artificial durante la estabilización del flujo. En el caso del

algoritmo OSS se quita la componente ortogonal sobre el dominio discreto del término convectivo y de esta forma no se agrega viscosidad artificial excesiva sobre la dirección del flujo haciendo que los resultados sean menos difusivos. Para el problema de cavitación sin embargo, se reconoce que a un aumento del número de Reynolds produce un aumento de la difusión numérica en ambos métodos. Más allá de las diferencias, con ambos algoritmos se han obtenido resultados confiables en los ejemplos numéricos abordados.

Desde el punto de vista de costo computacional, tanto para problemas estacionarios y también inestacionarios, la formulación del método OSS es claramente más costoso que el método ASGS, esto se debe a que el algoritmo OSS debe lidiar con las proyecciones ortogonales sobre el espacio de elementos finitos.

En cuanto a desarrollos futuros, las líneas de investigación están orientadas a la implementación de condiciones de contorno abierto y la adición de modelos de turbulencia más complejos; como así también extender el código que aquí se ha presentado para estudiar problemas tridimensionales de flujo incompresible y turbulento.

REFERENCIAS

- Badia, S., y Codina, R., Algebraic pressure segregation methods for the incompressible Navier-Stokes equations, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2008.
- Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall, 1995.
- Codina, R., Pressure Stability in Fractional Step Element Methods for Incompressible Flows. *Journal of Computational Physics*, 170:112-140, 2001.
- Codina, R., Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal sub-scales infinite element methods. *Computational Methods for Applied Mechanics in Engineering*, 190:1579-1599, 2000
- Cook, R.D., Malkus David S., y Plesha Michael E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4ta Edición, 2001.
- Fox R.W., y McDonald, A.T., *Introducción a la Mecánica de fluidos*, McGraw-Hill, 1985.
- Ghia U., Ghia K., y Shin C., High-Re Solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and multi-grid method, *Journal of Computational Physics*, 48:387-441, 1982
- Giraldo, L., *Análisis Numérico de Flujos Viscosos Incompresibles Bidimensionales aplicando Subescalas*, Trabajo Final de la carrera de Ingeniería Aeronáutica, Universidad Nacional de Córdoba, 2010.
- Hughes et. al., Multiscale and Stabilized Methods, *Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons©, 2004.
- Principe, J., y Codina, R., *On the stabilization parameter in the subgrid scale approximation of scalar convection-diffusion-reaction equations on distorted meshes*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, 2009.
- Reddy, J. N., *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1993.
- Rogers, S. E., y Kwak, D., An upwind Differencing Scheme for the Steady-State Incompressible Navier-Stokes Equations, *AIAA Journal*, 28:253-262, 1990.
- Roshko, A., On the development of turbulent wakes from vortex sheets, *Technical Report 1194*, NACA, 1954.
- Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, New York, 1969.
- Zienkiewicz, O.C., y Taylor, R.L., *The finite element method: The Basis (Vol I)*, Butterworth-Heinemann, 2002.