



4^{to} Congreso Argentino de Ingeniería Aeronáutica



ESTUDIO DE LOS LÍMITES DE ESTABILIDAD EN PARARROTORES

R. Faut^a, V. Nadal Mora^a, J. Piechocki^a, M. Knoblauch^b

^a UIDET GTA-GIAI, Dpto. Aeronáutica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata Calle 116 (1900) La Plata, Argentina. <http://www.ing.unlp.edu.ar/aeron/giai/>

^b Dpto. Aeronáutica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata Calle 116 (1900) La Plata, Argentina. <http://www.ing.unlp.edu.ar/aero>

Palabras claves: Pararrotor, autorrotación, estabilidad, simulación numérica

Resumen

A partir de la bibliografía de referencia se conoce la existencia de diferentes tipos de soluciones estables para el vuelo de pararrotos. Estudios anteriores indican que es posible definir un plano en función de dos parámetros de configuración (N_e y k_e) de los dispositivos, que permiten establecer regiones donde se manifiestan las diferentes soluciones estables halladas. Los límites de estas regiones han sido determinados en la bibliografía según modelos analíticos simplificados del comportamiento dinámico del dispositivo.

El objetivo de esta publicación es la determinación de límites de las diferentes regiones estables en el plano N_e - k_e , mediante la resolución de las ecuaciones completas de la dinámica del pararrotor.

Para la resolución de las ecuaciones completas se utiliza una rutina de simulación numérica. Se definen diferentes casos de estudio, en función de la relación entre los momentos de inercia principales del dispositivo, de su configuración, y en particular de la posición de las palas respecto al centro de masas y del ángulo de paso. Se diseñan modelos para cada caso analizado, y se realizan numerosas simulaciones, determinando límites entre las diferentes soluciones halladas, que incorporan los efectos no lineales del sistema.

Como resultado se presenta la ubicación de los límites entre soluciones estables en el plano N_e - k_e .

Como conclusión general se confirma la utilidad de los parámetros (N_e , k_e) como predictor de la estabilidad del sistema. Los límites hallados permiten evidenciar cualitativamente y cuantitativamente el impacto del comportamiento no lineal en la estabilidad.

En el caso que el plano que contiene las palas pase por el centro de masas, se evidencia que los parámetros (N_e , k_e) no son útiles para predecir el comportamiento estable del dispositivo, puesto que el efecto de la diferencia de paso entre las palas no queda contemplada.

NOMENCLATURA

$C_{l\alpha}$,	pendiente de la curva C_l vs α linealizada de las palas,
e_i ,	vectores de orientación según el eje i del sistema de ejes cuerpo,
I_i ,	momentos principales de inercia
k_{21} ,	relación r_{21}/r_{11} ,
k_{31} ,	relación r_{31}/r_{11} ,
k_e ,	relación de momentos de inercia,
N_e ,	Número de Estabilidad,
r_{ij} ,	componente j de la posición de la pala i al respecto del centro de masas del cuerpo,
S ,	área de una sola pala,
V ,	velocidad de caída en coordenadas inerciales,
β_i ,	ángulo de paso de la pala i ,
$\Delta\beta$,	diferencia entre el ángulo de paso de las palas,
θ_e ,	ángulo de nutación de equilibrio,
ρ ,	densidad del aire,
ω_3 ,	velocidad angular en dirección del eje e_3 en coordenadas cuerpo

1. INTRODUCCIÓN

El pararrotor es un decelerador aerodinámico (frena la caída de cuerpos en la atmósfera), que vuela en régimen de autorrotación. La autorrotación es la rotación continua de un cuerpo inmerso en un flujo axial sin otras fuentes externas de energía más que la propia acción de la corriente de fluido y de la gravedad. Cuando el cuerpo se desplaza en un fluido, las palas rotan y, como consecuencia de este movimiento, se generan fuerzas aerodinámicas que actúan en oposición a su movimiento de translación principal. Su desempeño y utilización práctica está supeditada al conocimiento de su dinámica del vuelo en función de los parámetros aerodinámicos y geométricos del dispositivo.

Los pararrotos se presentan como una alternativa a los paracaídas para determinadas misiones de descenso, contando con ventajas relativas entre las que se encuentran la facilidad de despliegue (no necesita inflado), el bajo peso, la capacidad de guiado.

Existen múltiples aplicaciones donde es necesario desacelerar la caída de un cuerpo entre los que se destacan la recuperación de elementos provenientes del espacio, el control de la trayectoria de proyectiles, las sondas meteorológicas para mediciones medioambientales, la entrada de vehículos tripulados o no tripulados a determinada atmósfera, el guiado de dispositivos aerodinámicos en vuelo.

El modelo de pararrotor básicamente está compuesto por un cilindro dispuesto verticalmente el cual determina los ejes propios del cuerpo, que se denominarán 1, 2 y 3, siendo el eje 3 coincidente con la vertical del cilindro. Sobre el denominado eje 2 del cilindro se disponen dos palas cuyos ejes son coincidentes, alejadas una distancia determinada del eje del cilindro. Finalmente el pararrotor tiene un centro de masas que puede ser coincidente o no con el plano que contiene a las palas. Se consideran plantas alares de forma rectangular.

Si bien las dimensiones tanto del cilindro como de las palas varían en función de la relación entre los momentos de inercia principales buscado, un ejemplo gráfico del modelo estudiado se presenta en la siguiente figura.



Figura 1: Representación del modelo de pararrotor estudiado

Surge del estudio de antecedentes que el concepto de decelerador es de origen biomimético, basado en el mecanismo de dispersión natural utilizado por algunas semillas. Rosen y Seter [1] desarrollaron un modelo con el objeto de predecir el equilibrio dinámico de un pararrotor tipo Sámara, convalidado con ensayos con fuentes importantes de incertidumbre en las mediciones. Posteriormente los mismos autores presentan un modelo numérico para investigar la estabilidad de la autorrotación vertical de la sámara [2], obtenido a partir del método de pequeñas perturbaciones aplicado a las ecuaciones del movimiento de la sámara.

Crimi [3] realiza un modelo numérico con 11 grados de libertad para describir el movimiento de un dispositivo de una sola ala en estado estacionario. El modelo permite alcanzar buena efectividad en la caída de la carga útil debido al régimen de descenso constante y al movimiento de rotación periódico.

También en el campo numérico, Rocca et. al. [4], desarrolla una herramienta para la simulación numérica de la aerodinámica no lineal e inestacionaria de semillas autorrotantes, que presentan mejoras respecto a las semillas que planean como ser el centro de gravedad, CG, ubicado en el extremo de la misma (favorece el inicio de la autorrotación) y un barrido del ala de gran superficie (favorece la estabilidad).

Inspirados en el concepto de la sámara, también se han desarrollado modelos a escala autopropulsados. Se destaca el trabajo de Fregene et. al. [5], donde modelan el comportamiento dinámico y aerodinámico de la sámara y fabrican un modelo propulsado, denominado *Samara*. El modelo tiene una superficie de control (flap) que representa el control cíclico virtual, y es utilizado para el control y el guiado. El modelo matemático se realiza a partir de las ecuaciones dinámicas, y utiliza un vector de estado de 13 elementos (3 posiciones, 3 velocidades, 3

velocidades angulares, 4 cuaternión). Para la estimación del estado se filtran las señales adquiridas por los sensores y se utiliza un filtro de Kalman extendido.

Kang et al. [6], estudia aspectos dinámicos y aerodinámicos de un monocóptero de visibilidad reducida. Utilizan la teoría de elemento de pala para el cálculo de las fuerzas aerodinámicas, linealizadas e integradas numéricamente debido a la complejidad que presentan. El modelo dinámico se obtiene a partir de las ecuaciones de la dinámica, incorporando el término aerodinámico desarrollado antes. Para el análisis de la estabilidad supone que las perturbaciones son pequeñas y formula la ecuación de momentos, desacoplando la ecuación que corresponde al eje vertical de las del plano horizontal. De este modo plantea un sistema dinámico no homogéneo, cuya solución depende de los autovalores de la matriz.

B. Ahmed y H. R. Pota [7] estudian el control de actitud de un vehículo aéreo de alas rotantes no tripulado (RUAV), así como el desarrollo de un método de control basado en Positive Position Feedback (PPF) que incrementa los márgenes de estabilidad y permite un ancho de banda de control mayor. Se obtienen los parámetros para diseñar un modelo lineal del RUAV, lo que permite un estudio completo de su dinámica, además de permitir el diseño de un sistema de aumento de estabilidad. Estos parámetros son verificados mediante datos recogidos de vuelos experimentales, y la performance del algoritmo propuesto es validado mediante un modelo de simulación del RUAV de alta fidelidad.

Steiner y Young [8] comparan diferentes sistemas deceleradores de alas rotatorias con distintos principios operativos de deceleración para el descenso atmosférico y aterrizaje en Titan, buscando comparar su potencial para la utilización en misiones donde sea necesario un descenso controlado, aterrizaje a baja velocidad, y la capacidad de realizar tareas de investigación en diferentes atmósferas. Analizan distintas opciones variando la cantidad de rotores, el sistema de control de cabeceo, sistema de control de rumbo, entre otras contribuciones. Se desarrollan modelos analíticos de primer orden para la evaluación, lo que permite determinar la relación entre los diferentes parámetros de diseño. Se comparan características como peso, costo, capacidad de control, velocidad de aterrizaje, potencia generada, capacidad de realizar tareas de investigación atmosférica. Se concluye que el sistema más adecuado para este tipo de misiones es un sistema de rotor simple, con control de paso cíclico de cabeceo. Koehl, Rafaralahy, Boutayeb, y Martínez [9] investigan el problema de la estimación de la perturbación del viento, de los parámetros aerodinámicos, y de la velocidad lineal de un MAV (Micro Air vehicle), lanzado con un cañón, previsto para el vuelo al aire libre mediante el uso de un rotor de dos palas coaxiales que funcionan por autorrotación.

1.1. Antecedentes particulares de la temática en estudio

Nadal Mora, Piechocki, Sanz Andrés y Cuerva ha estudiado la dinámica del vuelo de pararrotos con alas de pequeño alargamiento, a través de desarrollos analíticos, simulación numérica y experimentación en túneles de viento horizontal y vertical [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. Han estudiado en forma teórica y experimental el descenso en autorrotación axial y, teóricamente, la dinámica del vuelo de un cilindro provisto de aletas. Desarrollaron herramientas numéricas de simulación que permiten observar para casos específicos el comportamiento dinámico con efectos no lineales. Por otro lado, caracterizaron el tipo de soluciones que es posible hallar en función de distintos parámetros de diseño y regiones de estabilidad asociadas. También se realizaron ensayos sobre un pararrotor en un túnel de viento vertical, donde los modelos tuvieron libertad para orientarse en el espacio y rotar libremente.

De estos estudios surge la existencia de tres tipos de respuestas dinámicas del pararrotor:

- Solución Tipo I. Este tipo de solución agrupa a todas aquellas en donde el ángulo de nutación θ_e es nulo o muy pequeño ($\sim 10^{-3}$ rad).
- Solución Tipo II. Este tipo de solución agrupa a todas aquellas en donde el ángulo de nutación θ_e tiene un valor medio que no es pequeño ($\sim 10^{-1}$ rad), que permanece constante en el tiempo y que puede presentar oscilaciones. Suelen llamarse también soluciones tipo cónicas.
- Inestabilidad dinámica.

Respecto a la primera línea de investigación, se ha obtenido una herramienta matemática para predecir el comportamiento de un pararrotor que funciona en un régimen de autorrotación axial, se ha determinado cuáles son los parámetros que afectan al comportamiento del pararrotor y de qué manera se manifiesta su influencia, entre otros. Del análisis de la dinámica del vuelo surge que la estabilidad del pararrotor queda definida por medio de dos parámetros adimensionales: el de estabilidad N_e y la relación de momentos de inercia k_e , que contienen parámetros aerodinámicos, geométricos y dinámicos del pararrotor. Estos parámetros permiten establecer un plano coordenado donde se identifican las distintas regiones estables e inestables establecidas.

$$N_e = I_\alpha C_{l\alpha} \frac{k_{31}(\beta_0 - 2k) + k_{21}}{I_3 - I_2} \quad (1)$$

$$k_e = 4k_{21}^2 \frac{I_2 I_3 - I_1}{I_1 I_3 - I_2} \quad (2)$$

Donde r_{ij} = distancia del centro de presiones de la pala i en dirección j ,
 $C_{l\alpha}$ = pendiente de la curva C_l vs α linealizada de las palas,
 $k_{31} = r_{13}/r_{11}$,
 $k_{21} = r_{21}/r_{11}$,
 $I_\alpha = \rho S r_{11}^3$, ρ = densidad del aire, S = superficie de la pala,
 $k = V/\omega_3 r_{11}$, V = velocidad de caída, ω_3 = velocidad angular en dirección e_3 en coordenadas cuerpo

En este sentido, se han hallado las regiones estables e inestables, límites de estabilidad (entre las regiones estables e inestables), y condiciones de estabilidad para el giro alrededor de un eje próximo a uno de los ejes principales de mayor, menor e intermedio valor del momento de inercia.

El parámetro k_{31} , introducido Piechocki en [11], contempla el desplazamiento del plano que contiene a las palas respecto del centro de masas del dispositivo, y será de gran utilidad para el estudio del efecto de tal desplazamiento en la estabilidad del pararrotor.

Nadal Mora [10], presenta una clasificación de pararrotos en cuatro casos, según la relación de magnitud entre los momentos de inercia principales del dispositivo. Piechocki [11] adopta esa clasificación y, mediante un modelo analítico simplificado, presenta las regiones alcanzables, estables e inestables, en el plano N_e-k_e para cada caso, contemplando los casos para $k_{31} \neq 0$.

Casos		Relación de momentos de inercia principales
A	Estabilidad inercial Eje principal mayor próximo al eje de giro	$I_3 > I_2, I_1$
B	Estabilización aerodinámica Eje principal intermedio próximo al eje de giro	$I_2 > I_3 > I_1$
C	Estabilización aerodinámica Eje principal intermedio próximo al eje de giro	$I_1 > I_3 > I_2$
D	Estabilidad inercial Eje principal menor próximo al eje de giro	$I_1, I_2 > I_3$

Tabla 1: Casos de configuración geométrica

El objetivo del presente trabajo es complementar los estudios de Nadal Mora, Piechocki, Sanz Andrés y Cuerva, mediante la determinación de límites de las diferentes regiones estables en el plano N_e-k_e para todos los casos, mediante la resolución de las ecuaciones completas de la dinámica del pararrotor. Los límites hallados en [11], únicamente dividen las regiones alcanzables del plano entre estables e inestables, y refieren a un modelo matemático lineal simplificado del comportamiento del pararrotor. Se determinarán los límites entre las distintas soluciones estables identificadas, y entre las soluciones estables y la inestabilidad. Además, los límites así determinados permiten evidenciar cualitativamente y cuantitativamente el impacto del comportamiento no lineal en la estabilidad del dispositivo

Para alcanzar el objetivo es necesario el desarrollo de bloques adicionales al simulador presentado por Piechocki [11], que serán de utilidad para el establecimiento de los tiempos de simulación, y la adquisición, procesamiento y presentación de los resultados.

2. METODOLOGÍA

La metodología propuesta para la determinación de los límites entre las diferentes soluciones estables y la inestabilidad se basa en la resolución de las ecuaciones completas de la dinámica del pararrotor para numerosas configuraciones del dispositivo.

Se propone, para cada caso presentado en la Tabla 1, una configuración geométrica que determina los valores de los momentos de inercia principales y las distancias r_{ij} .

La diferencia entre el ángulo de paso de las palas ($\Delta\beta$) es un parámetro que condiciona la estabilidad del dispositivo. Para el estudio de su influencia en la dinámica del pararrotor, se fija un valor de ángulo de paso de pala 1 (β_1), y se realiza un barrido de valores de β_2 .

Además, para el estudio de la influencia del parámetro k_{31} en los límites entre las diferentes soluciones halladas, se establece un rango de valores para este parámetro que estará condicionado por la geometría del modelo y la relación de momentos de inercia que este presenta.

De la configuración establecida para el modelo en estudio, y los resultados obtenidos de las ecuaciones, es posible la identificación de la solución obtenida y el cálculo de los parámetros N_e y k_e , que representan un punto en el plano N_e - k_e . La obtención de numerosos puntos en el plano permite la caracterización de las distintas regiones del plano, quedando evidenciados los límites entre las diferentes soluciones. Este proceso se repite para todos los casos presentados en la Tabla 1

Para la resolución de las ecuaciones completas de la dinámica de pararrotor resulta de gran utilidad el simulador numérico desarrollado por Piechocki [11], que se detalla en el apartado siguiente. Sin embargo, esta herramienta muestra algunas limitaciones en el desarrollo de la metodología propuesta. Surge así la necesidad de realizar mejoras al simulador mediante la adición de algunos bloques de cálculo y la automatización de comandos mediante programación.

2.1. Simulador numérico

En [11], Piechocki utiliza como herramienta de cálculo el programa Scicos (similar al Simulink), el cual permite expresar en forma mimética (imitando circuitos analógicos) las distintas expresiones matemáticas de la formulación analítica, para el desarrollo de un simulador numérico que resuelva las ecuaciones completas de la dinámica del pararrotor.

El modelo gráfico del sistema se basa en tres tipos de elementos: entradas, bloques de proceso y salidas. Este modelo gráfico describe relaciones matemáticas sobre una base temporal de flujo de datos. La representación gráfica dispone en el extremo izquierdo las entradas del proceso al cual se hace referencia y, en el extremo derecho, las salidas.

Para la simulación numérica de la dinámica del pararrotor se utilizan cuaterniones normalizados para la definición de la orientación relativa de los ejes cuerpo al respecto de los ejes inerciales. A su vez, se transforman estos cuaterniones en ángulos de Euler para la representación de la orientación del pararrotor. La orientación del pararrotor, en particular el ángulo de nutación θ , permite la identificación del tipo de solución establecida en la simulación

La metodología para resolución de las ecuaciones de la dinámica del pararrotor se basa en la integración en pasos temporales, a partir de valores iniciales, de la aceleración angular, la aceleración translacional, y la velocidad translacional, a fin de obtener la velocidad angular, la velocidad translacional y la posición del modelo. De esta manera es posible calcular las fuerzas y momentos aerodinámicos actuantes en el modelo que permiten la resolución de las ecuaciones del paso de integración siguiente.

La figura 2 muestra el modelo gráfico genérico del simulador donde se identifican los bloques de cálculo de las fuerzas y momentos, y su posterior entrada en el bloque genérico de cálculo de orientación y actitud del dispositivo.

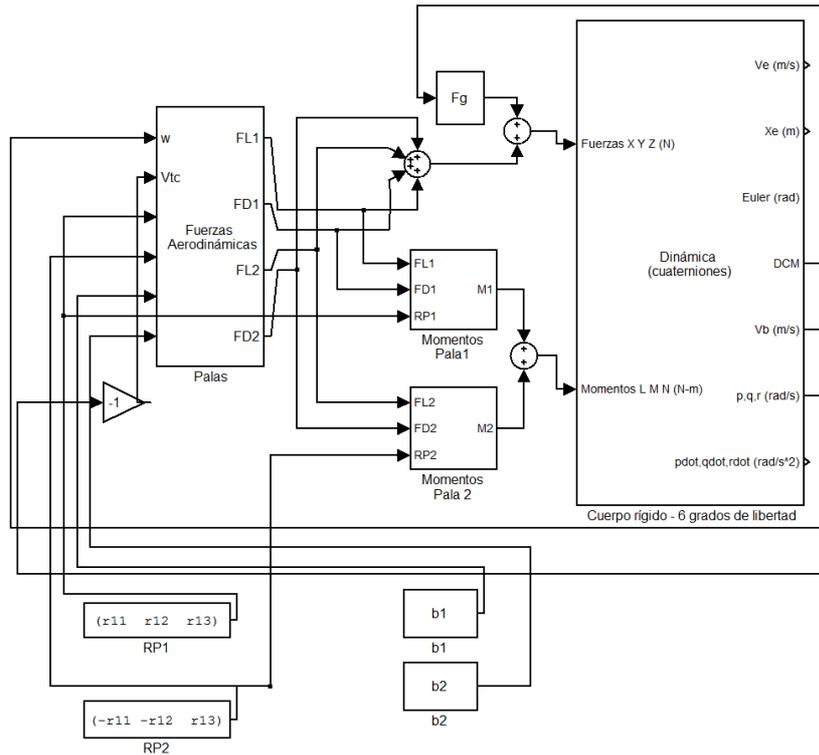


Figura 2: Modelo gráfico genérico del simulador numérico

La simulación numérica, en esta versión de la herramienta, supone el establecimiento de algunos parámetros de simulación y determinadas condiciones iniciales, sobre las cuales se computa el modelo matemático. Los parámetros iniciales del simulador se presentan en la siguiente tabla.

Parámetros de simulación	Tiempo de simulación Método de integración numérica Tipo de paso de integración (fijo o variable)
Condiciones iniciales	Velocidad inicial - Ejes inerciales Orientación inicial – Euler – Ejes inerciales Velocidad angular inicial – Ejes cuerpo

Tabla 2: Parámetros iniciales del simulador numérico

Además, los parámetros referidos a la configuración geométrica y aerodinámica del modelo de pararrotor en estudio, se definen en *script*, que debe ser cargada antes del inicio de la simulación. Esta incluye los siguientes datos.

Parámetros de configuración	Masa Momentos de inercia principales Distancias r_{ij} Superficie Alar Alargamiento Alar Ángulo de diedro de las palas
Parámetros de aerodinámicos	Coefficiente de sustentación de cada pala Coefficiente de resistencia de cada pala

Tabla 3: Parámetros de configuración y aerodinámicos del modelo

Es necesario aclarar que el ángulo de paso de ambas palas, en esta versión de la herramienta, se cargan directamente sobre los bloques correspondientes del modelo gráfico genérico.

En estas condiciones, se evidencian algunas limitaciones que presenta esta versión del simulador para el desarrollo de la tarea que se propone.

La principal dificultad es la necesidad de conocer, con antelación a la ejecución de la rutina numérica, el tiempo de simulación necesario para que la solución se estabilice (en caso de tratarse de una solución estable). Como el estudio pretende la determinación de soluciones para numerosas configuraciones de un pararotor, el tiempo de simulación será diferente para cada caso estudiado. En particular, cuando la configuración del modelo es tal que resulta cercana al límite entre las soluciones tipo I y tipo II, los tiempos de simulación necesarios para el establecimiento del resultado se incrementa considerablemente. Esta situación redundará en simulaciones fallidas, donde el tiempo de simulación preestablecido no es suficiente para alcanzar los resultados pretendidos, aumentando los tiempos de análisis a niveles que resultan impracticables.

Otra limitación que presenta la herramienta es la no consideración de la variación de los momentos de inercia principales con la ubicación del plano que contiene las palas. De esta manera, resulta necesario realizar el cálculo, y la introducción al simulador, de los momentos de inercia antes de cada simulación, impactando negativamente en los tiempos de simulación.

El desplazamiento del plano que contiene a las palas respecto al centro de masas del cilindro, en ambos sentidos de la dirección e_3 en coordenadas cuerpo, provoca un aumento en los momentos de inercia I_1 e I_2 , sin modificar el valor de I_3 .

El conocimiento de este comportamiento reviste interés en tanto que una variación de la ubicación del plano que contiene a las palas puede llevar a un cambio en la relación de momentos de inercia principales, cambiando el caso en estudio.

Por último, la naturaleza de los resultados a relevar requiere el procesamiento de gran cantidad de datos. El simulador no cuenta con comandos de procesamiento de los resultados, siendo necesario realizar esta tarea luego de cada simulación.

2.2. Desarrollo de mejoras en el simulador numérico

El análisis de la herramienta presentado en el apartado anterior muestra que el simulador numérico expuesto resulta de gran utilidad para abordar la tarea que se propone, pero requiere del desarrollo de algunas mejoras destinadas principalmente a reducir los tiempos de simulación y de procesamiento de resultados.

Para atender la necesidad del conocimiento del tiempo de simulación necesario para que una solución se desarrolle, se propone la adición de un bloque que identifique la solución establecida y, en base a esta identificación, establezca una condición para la detención automática de la simulación.

Es necesario, entonces, definir un indicador que determine la estabilización de la solución (si la solución es estable). Para esto, se estudia el comportamiento del ángulo de nutación θ para las tres soluciones halladas.

Las figuras siguientes representan el comportamiento típico de la variable θ en ambas soluciones estables y en la inestabilidad presentadas en los antecedentes.

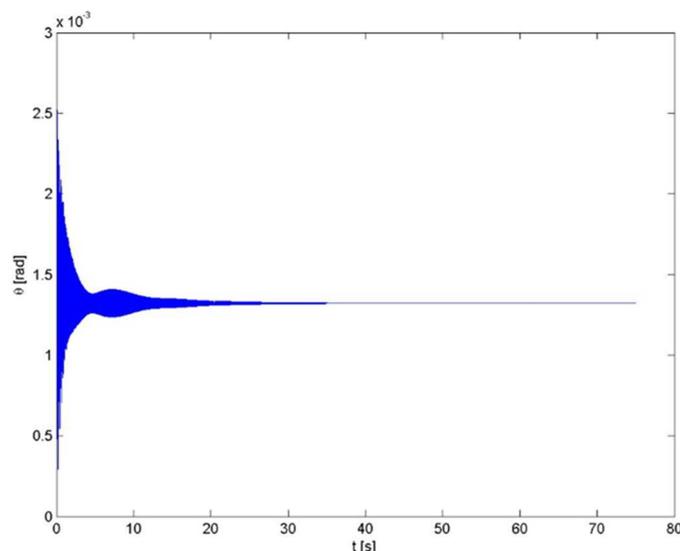
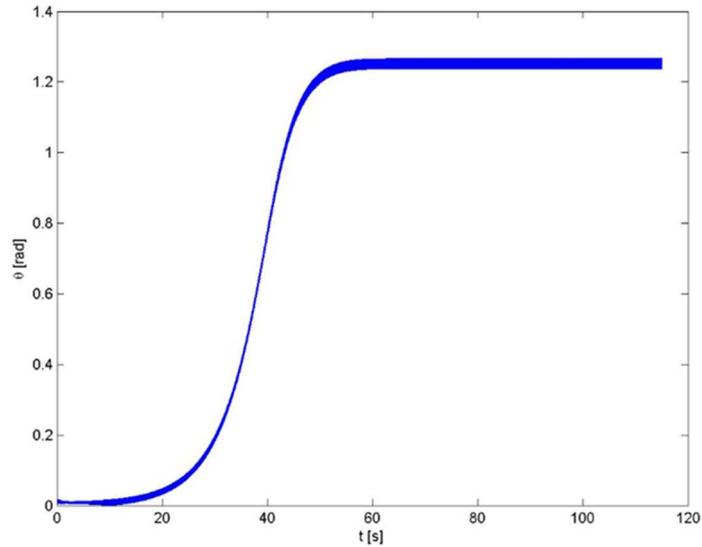
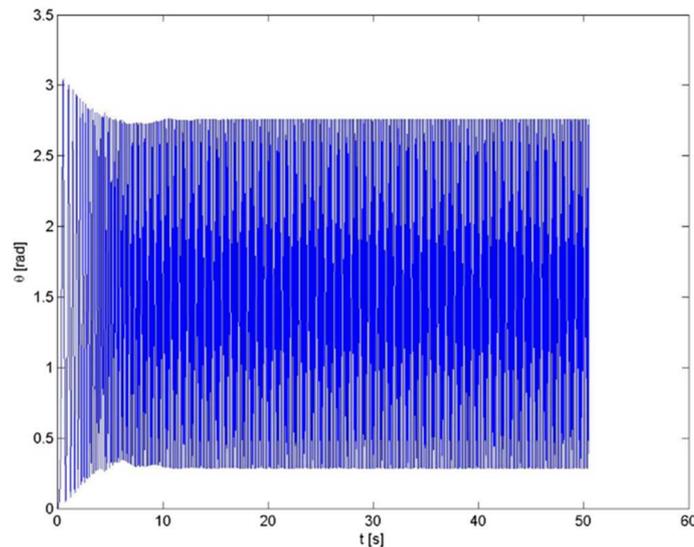


Figura 3: Comportamiento típico del ángulo de nutación (θ) en solución tipo I


 Figura 4: Comportamiento típico del ángulo de nutación (θ) en solución tipo II

 Figura 5: Comportamiento típico del ángulo de nutación (θ) en solución inestable

Es necesario aclarar que durante el barrido de configuraciones de los modelos de pararrotor estudiados, y en particular en las regiones límites entre las soluciones alcanzables, la morfología del comportamiento del ángulo de nutación en las diferentes soluciones establecidas puede diferir a las aquí presentadas, pero en todos los casos los criterios utilizados para la identificación de la solución y la detención automática de la simulación se cumplen.

Del análisis del comportamiento del ángulo θ se obtienen las siguientes conclusiones:

- La solución tipo I presenta un comportamiento oscilatorio en su régimen transitorio y queda completamente establecida cuando la amplitud de oscilación de θ se anula.
- La solución tipo II presenta un comportamiento oscilatorio en todo el rango de tiempo analizado, y se aprecia un crecimiento en los valores de θ hasta alcanzar un régimen oscilatorio estable cuya amplitud varía según las distintas configuraciones del dispositivo.
- Se asume que la solución es inestable si el valor de θ supera los 1,4 rad ($\sim 80^\circ$).

Bajo estas condiciones, y luego de un largo proceso de prueba y error, se determinan dos criterios lógicos que permiten el diseño del modelo gráfico del bloque de detención automática de la simulación, uno para los casos donde se desarrolle una solución tipo I, y otra que actúe cuando una solución tipo II, o una solución inestable, se establezca.

El modelo gráfico resultante puede dividirse en dos estructuras diferentes, una para cada criterio. Cada estructura cuenta con un bloque tipo “stop simulation”, que interrumpe la simulación al cumplirse un criterio lógico, y al que la señal del valor del ángulo de nutación θ accede luego de recorrer un circuito con una serie de bloques de cálculo y lógicos que evalúan este criterio en cada paso de integración.

Las dos estructuras desarrolladas y los criterios adoptados en cada una de ellas se detallan en los párrafos siguientes.

Si el valor de la señal es menor a 0,08 rad ($\sim 4,5^\circ$), se identifica una solución estable tipo I. La señal pasará por una serie de bloques de cálculo que, mediante la determinación de las envolventes de los valores máximos y mínimos del movimiento oscilatorio de la variable, se determina la amplitud de oscilación. Luego, una serie de bloques lógicos detectan cuando este valor se anula, condición necesaria para la detención de la simulación. Para evitar que un valor de amplitud nula instantánea, que no implique la estabilización de la solución, detenga la simulación, se agregan bloques de retardo que permiten comparar el valor de la señal actual con la retardada. De esta manera, la simulación se detendrá cuando las amplitudes calculadas de la señal retardada y la actual sean nulas. Es decir, la simulación se detendrá cuando la amplitud de la señal sea nula durante un tiempo arbitrario (tiempo de retardo, en el modelo se utilizan 10 s). Esta afirmación se basa en que la probabilidad de que la amplitud calculada sea nula en dos instantes elegidos arbitrariamente (señal actual y retardada), es cero.

Si el valor de la señal es mayor a 0,08 rad, las soluciones alcanzables son la solución estable tipo II y la inestabilidad. La morfología que adopta la señal al desarrollarse la solución tipo II muestra que el movimiento es oscilatorio, con un valor de la señal que evidencia un crecimiento hasta alcanzar un valor constante. Los bloques que recorre la señal en este circuito calculan la envolvente de los valores máximos del movimiento oscilatorio. Un bloque lógico detecta si el valor de esta envolvente sufre cambios, cuando no se detectan cambios es indicativo que la señal alcanzó el valor de estabilización. Además, es posible calcular el tiempo transcurrido desde el último cambio detectado. Se asume entonces, como criterio para la detención de la simulación, que el valor de la envolvente de los valores máximos de la señal no sufra cambios durante un tiempo arbitrario. Al tratarse de un movimiento oscilatorio, los resultados a relevar requieren de calcular valores promedios y amplitudes, siendo conveniente entonces contar con una amplia muestra. Es por esto que, para la presente tarea, ese tiempo arbitrario se fija en 50 s.

Cabe destacar que el criterio establecido en el párrafo anterior también se cumple en caso de soluciones inestables (ver comportamiento de la señal y tiempo de simulación en Figura 5).

La figura 6 muestra el modelo gráfico con el bloque para la detención automática de la simulación.

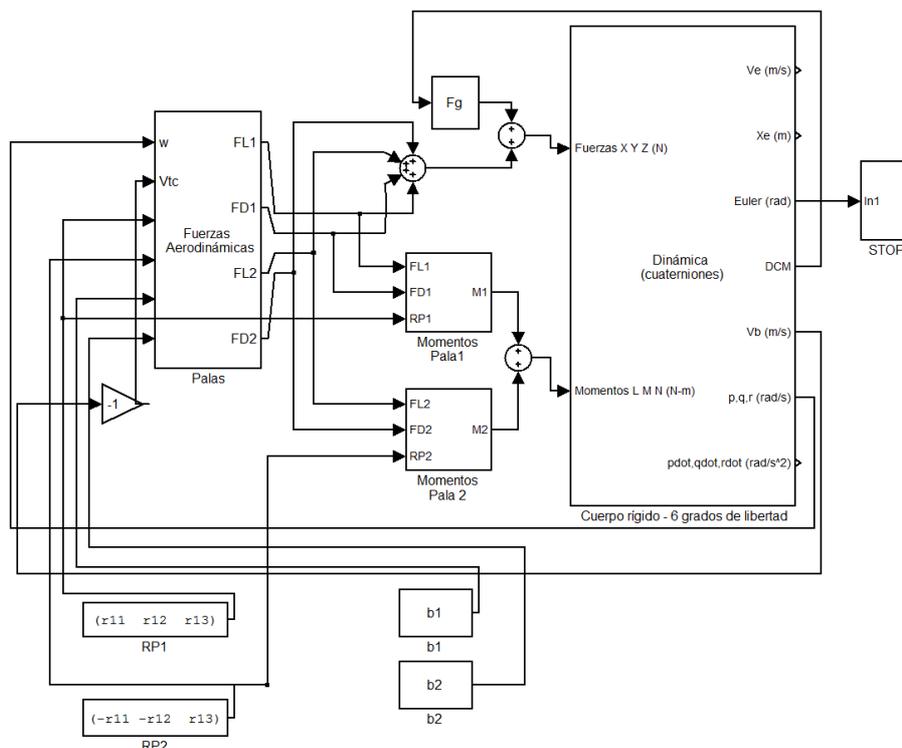


Figura 6: Modelo gráfico genérico del simulador numérico con detención automática

La figura 7 presenta el modelo gráfico de la secuencia de cálculo y lógica que determina los condicionantes que se utilizan como criterios para la detención automática de la simulación, en donde la señal de entrada corresponde al valor del ángulo de nutación.

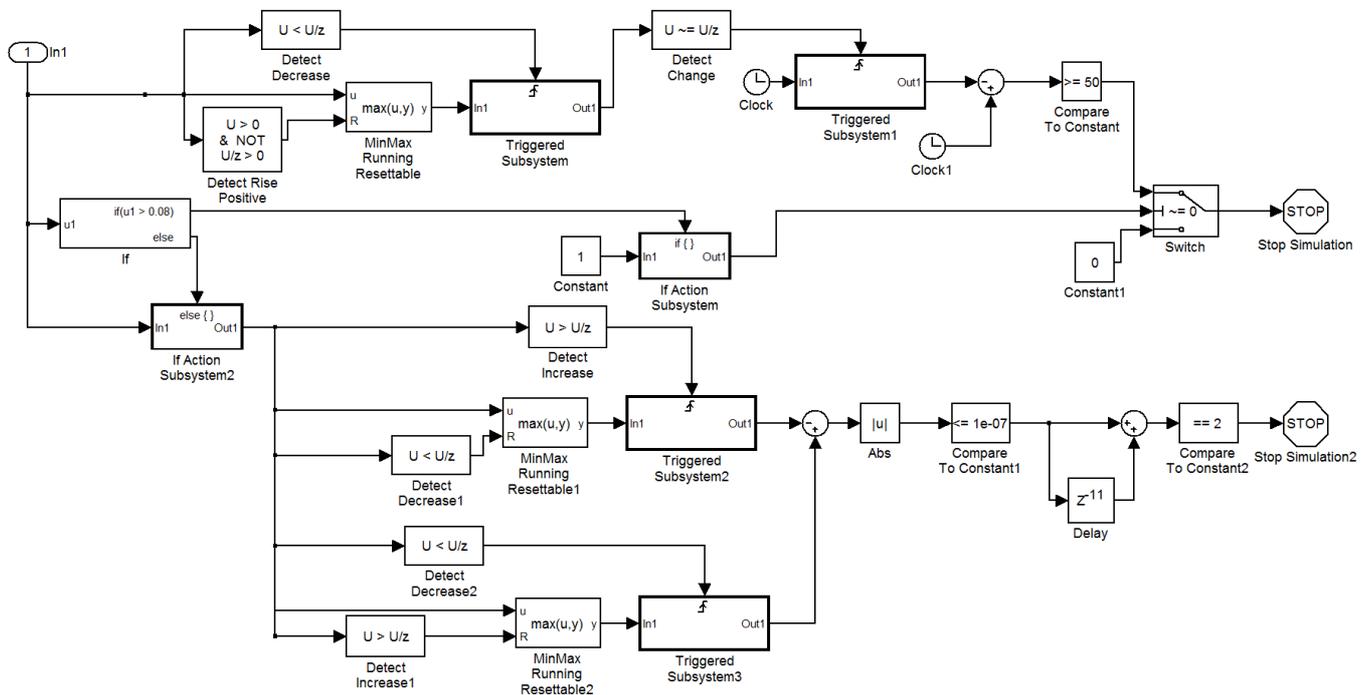


Figura 7: Secuencia de bloques de cálculo y lógicos para la detención automática de la simulación

Respecto a la necesidad de considerar la variación de los momentos de inercia principales con la posición del plano que contiene a las palas, se realizaron modificaciones sobre el *script* que se carga antes del inicio de la simulación. Al valor de los momentos de inercia principales se les suma el aporte del desplazamiento del plano de palas que depende del parámetro k_{31} . El cálculo del aporte se basa en el teorema de Steiner. Esta mejora permite que durante el barrido de parámetros k_{31} los valores de los momentos de inercia principales se actualicen automáticamente.

El desplazamiento del plano que contiene las palas modifica también la posición del centro de masas del dispositivo y, por extensión, al valor de k_{31} . Se contemplan una serie de comandos que calcula el valor del parámetro k_{31} referido a la nueva posición del centro de masa (k_{31r}).

Para atender la última limitación encontrada, se desarrolla una hoja de comandos destinada a automatizar el barrido de diferentes parámetros de configuración del modelo, y el procesamiento de los resultados a relevar.

El resultado es un *script* que permite el barrido de los parámetros k_{31} y el ángulo de paso de la pala 2 (β_2). Además invoca a la hoja de comandos que define los parámetros del modelo a simular. Paso seguido ejecuta la simulación; identifica el caso ensayado; y adquiere, procesa y almacena los resultados.

El propio *script* desarrollado contiene comandos que permite almacenar los resultados de la simulación en dos formatos, texto e imagen.

Una vez terminada la simulación, se crea un archivo .txt que almacena los valores numéricos de todos los parámetros relevados una vez que la situación de equilibrio es alcanzada. Estos parámetros dependen del tipo de solución identificada. El orden y formato de los parámetros almacenados es tal que resulten prácticos para su extracción y análisis final en una planilla de cálculos.

En caso de identificarse una solución tipo I o la inestabilidad, los parámetros que se relevan son:

- Tipo de solución
- Valor promedio de la velocidad angular según los tres ejes en coordenadas cuerpo ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$)
- Valor promedio de la velocidad de caída en coordenadas inerciales (V)
- Valor promedio del ángulo de nutación (θ)
- Parámetro N_e
- Parámetro k_e

- Tiempo de simulación (t)
- Valor del parámetro k_{31} referido a la posición real del centro de masas(k_{31r})
- Caso simulado (A, B, C, o D)

En caso de identificarse una solución tipo II, donde varias variables presentan comportamiento oscilatorio, se relevan además los siguientes valores:

- Amplitud de la velocidad angular según los tres ejes en coordenadas cuerpo
- Amplitud de la velocidad de caída en coordenadas cuerpo
- Amplitud del ángulo de nutación

Se crea, además, un archivo imagen que registra la gráfica de los valores del ángulo θ en función del tiempo, que permite verificar que la solución se ha establecido, o en otras palabras, que el bloque de detención automática de la simulación funcionó de manera correcta.

Es necesario aclarar que en los pocos casos en que el bloque de detención de la simulación interrumpió los cálculos antes de lo deseado, los datos almacenados en dicha corrida permiten inferir el tiempo de simulación necesario para el desarrollo completo de la solución buscada.

Las mejoras desarrolladas disminuyen de manera considerable los tiempos de análisis para la tarea que se propone. Una vez cargadas las características físicas del modelo, así como sus parámetros de configuración y aerodinámicos, se especifican los valores de k_{31} y del ángulo de paso de la pala 2 (β_2), que se pretenden considerar. Se ejecuta el *script* desarrollado, y una vez terminadas las rutinas propuestas se extraen los resultados almacenados para el análisis posterior en una planilla de cálculos.

2.3. Modelos desarrollados para las simulaciones

Se desarrollan modelos para los cuatro casos presentados en la tabla 1. Todos los modelos desarrollados exhiben una configuración acorde a la presentada en la figura 1. Los mismos están diseñados de manera que resulten modelos construibles. Esta condición implica la modificación de la geometría de todas las partes constitutivas del pararotor, hasta lograr la relación entre momentos de inercia principales buscada.

Resulta particularmente difícil alcanzar las condiciones para el caso B ($I_2 > I_3 > I_1$), y el caso C ($I_1 > I_3 > I_2$), evidenciando poca relevancia de estos casos en aplicaciones prácticas.

Las características de los modelos desarrollados para cada caso se presentan en las tablas 4 y 5:

Caso	Altura cilindro [m]	Diámetro ext cilindro [m]	Espesor cilindro [m]	Envergadura pala [m]	Cuerda pala [m]	Espesor pala [m]
A	0,0600	0,064	0,002	0,040	0,0615	0,001
B	0,0500	0,034	0,002	0,030	0,0154	0,001
C	0,0575	0,040	0,002	0,005	0,1500	0,001
D	0,0800	0,024	0,002	0,040	0,0615	0,001

Tabla 4: Parámetros geométricos de los modelos desarrollados

Caso	$r_{11} = -r_{21}$ [m]	$r_{12} = -r_{22}$ [m]	I_1 [kg.m ²]	I_2 [kg.m ²]	I_3 [kg.m ²]
A	0,0620	0,00861	$5,14 \times 10^{-5}$	$7,85 \times 10^{-5}$	$9,20 \times 10^{-5}$
B	0,0420	0,00385	$9,17 \times 10^{-6}$	$1,24 \times 10^{-5}$	$1,03 \times 10^{-5}$
C	0,0325	0,03750	$2,07 \times 10^{-5}$	$2,03 \times 10^{-5}$	$2,06 \times 10^{-5}$
D	0,0370	0,00861	$1,98 \times 10^{-5}$	$2,82 \times 10^{-5}$	$1,61 \times 10^{-5}$

Tabla 5: Parámetros geométricos de los modelos desarrollados

Los valores de I_1 , I_2 , e I_3 presentados corresponden a los valores de los momentos de inercia principales para la configuración donde el parámetro k_{31} es nulo. Además, no se detalla el parámetro r_{13} (y r_{23}), debido a que su valor irá variando conforme al barrido del parámetro k_{31} .

2.4. Simulaciones

Las numerosas simulaciones necesarias para la determinación de los límites entre las diferentes soluciones identificadas se realizan utilizando las mejoras desarrolladas sobre el simulador presentado por Piechocki [11].

De esta manera se cargan los datos de entrada, detallados en las tablas 2 y 3, y se definen los rangos de valores del parámetro k_{31} y del ángulo β_2 , que determinan cada configuración que se pretende estudiar. Las herramientas del simulador perfeccionado registran los resultados de cada configuración simulada en un formato que resulta práctico para su procesamiento final en una planilla de cálculos.

Es necesario resaltar que el barrido de valores del parámetro k_{31} debe ser coherente, tanto con la configuración geométrica del dispositivo, así como con la relación entre los valores de momentos de inercia que el caso estudiado impone. Esto quiere decir que los valores máximos y mínimo del rango de valores de k_{31} estudiados, quedan limitados por la altura del cilindro (evitando estudiar un sistema donde el plano de palas quede fuera del cilindro), y por la relación de momentos de inercia.

Como se mencionó anteriormente, cualquier variación del parámetro k_{31} induce un aumento en el valor de los momentos de inercia I_1 e I_2 . Es por ello que este efecto toma preponderancia en el estudio de los casos A, B, y C, donde la variación del parámetro k_{31} puede provocar un cambio en la relación de momentos de inercia establecida.

La ejecución de las simulaciones se lleva a cabo bajo las siguientes premisas:

- Los modelos desarrollados representan una configuración geométrica construible.
- Los valores de k_{31} analizados en cada caso son tales que se mantiene la relación entre los valores de los momentos de inercia principales.
- Los valores de k_{31} analizados en cada caso son coherentes con la configuración geométrica del dispositivo.
- Se fija un valor de ángulo de paso de pala 1 (β_1), igual a 0.07 rad ($\sim 4^\circ$).
- Se consideran únicamente valores de $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$ nulos o positivos.
- En las regiones límite entre dos soluciones establecidas, el paso del barrido de valores de β_2 es igual a una centésima de radian (0,01 rad).
- El valor máximo de β_2 , en todos los casos estudiados, será aquel que induzca una solución inestable.

Bajo estas premisas, la rutina de simulación implica la definición previa del rango de valores del parámetro k_{31} a simular, mientras que el rango de valores de β_2 contemplado surge de la propia simulación, pudiendo ser necesario un proceso corto de iteración.

3. RESULTADOS

En este apartado se presenta el análisis de los resultados obtenidos para todas las configuraciones simuladas, en cada caso analizado.

Es necesario aclarar que, observando la formulación del parámetro N_e , surge que el mismo depende de variables que son resultado de la propia simulación (como la velocidad de caída o la velocidad de rotación según ejes cuerpo). Esta situación evidencia la variabilidad que tiene este parámetro en el caso de desarrollarse soluciones inestables. Es por esta condición que únicamente se grafican los puntos en el plano $N_e - k_e$ correspondientes a soluciones estables.

También, repasando la expresión matemática del parámetro k_e , se evidencia que su valor será constante para cada magnitud del parámetro k_{31} estudiado (no hay dependencia con $\Delta\beta$). Es más, como el efecto del parámetro k_{31} al valor de los momentos de inercia principales es mediante la distancia r_{i3} al cuadrado, se deduce que un modelo con un valor particular del parámetro $k_{31} = b$ cuyos momentos de inercia principales son I_1 , I_2 e I_3 , tendrá estas mismas magnitudes de momentos de inercia para el valor opuesto del parámetro $k_{31} = -b$, y por lo tanto el mismo valor del parámetro k_e .

De lo anterior surge que cada nube de puntos donde el valor de k_e se mantiene constante, corresponde a configuraciones para una misma magnitud de k_{31} y su valor opuesto.

Además, bajo la premisa de analizar un modelo de pararrotor para cada caso presentado en la Tabla 1, y sólo valores de $\Delta\beta > 0$, se resalta que no todos los casos pertenecientes a las regiones alcanzables halladas en los antecedentes fueron estudiados, sino que quedan configuraciones pendientes de análisis en estudios futuros.

Se presentan, para los casos donde los resultados muestran relevancia para aplicaciones prácticas, las gráficas de los planos $N_e - k_e$, donde se evidencian las diferentes regiones identificadas. Se destacan en las gráficas presentadas aquellas correspondientes a una configuración de referencia, donde $\Delta\beta = 0$, que representa el valor inicial de barrido del ángulo β_2 , es decir, la configuración inicial para cada valor del parámetro k_{31} estudiado.

3.1. Caso A

Bajo las premisas detalladas en la metodología de trabajo, el estudio de modelo desarrollado para el caso A ($I_3 > I_1, I_2$), queda acotado a un rango de valores de k_{31} entre $-0,5$ y $0,5$.

Siguiendo el estudio de los casos presentado por Piechocki [11], para el caso A un valor nulo de k_{31} implica un valor N_e positivo. Para valores de k_{31} positivos, se alcanzan valores negativos y positivos de N_e , para k_{31} negativos, se alcanzan únicamente valores positivos de N_e . El parámetro k_e será siempre positivo y, como ya se argumentó, será equivalente para valores opuestos de k_{31} .

Los resultados obtenidos muestran que los tres tipos de soluciones, presentadas en los antecedentes, son alcanzadas en las distintas configuraciones del modelo analizado.

La figura 8 presenta la serie de puntos del plano N_e-k_e donde se estableció una solución tipo I. De la totalidad de los puntos se resaltan aquellos que corresponden a la configuración de referencia ($\Delta\beta=0$), y aquellos que representan el punto límite entre una solución tipo I y una solución tipo II.

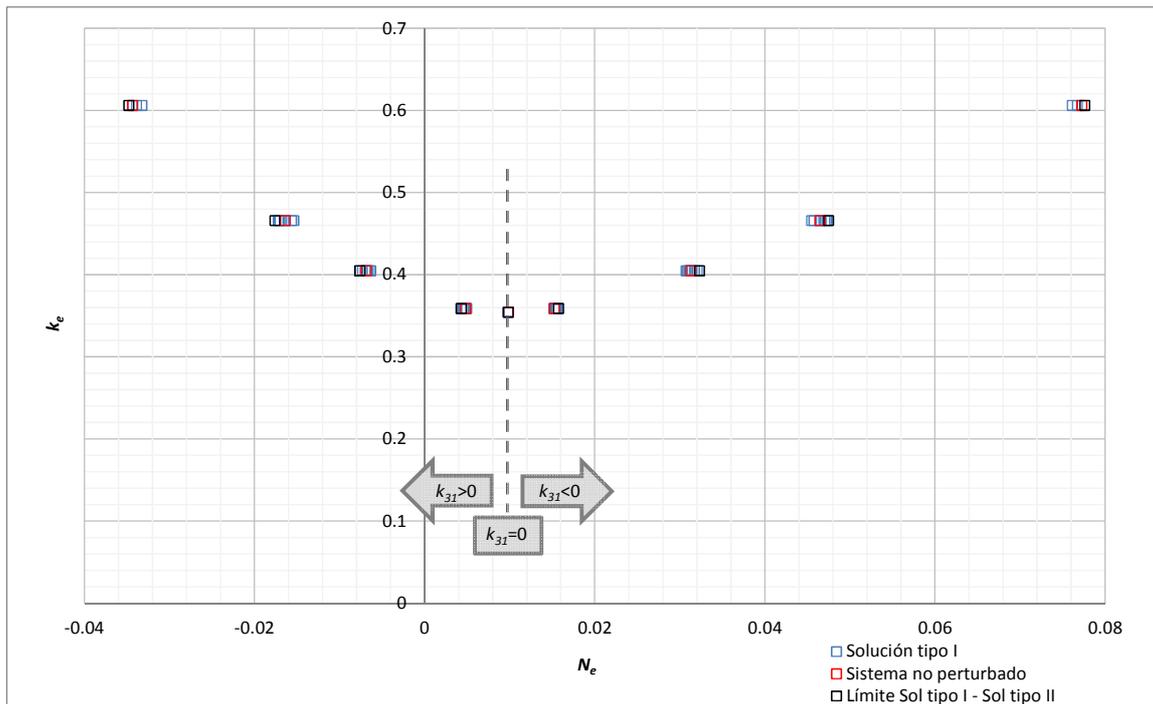


Figura 8: Límites de la región donde se desarrolla una solución tipo I, Caso A

Se observa que, para todos los valores del parámetro k_{31} analizado, la solución tipo I es alcanzable con una diferencia de ángulo de paso de las palas distinta de cero.

Además se resalta que, para el caso $k_{31}=0$, se evidencia un cambio de solución tipo I a tipo II, sin embargo, debido a la formulación matemática del parámetro N_e , este no modifica su valor en todas las configuraciones estudiadas. Como se observa en la ecuación (1), un factor k_{31} nulo, elimina el efecto de la diferencia de ángulo de paso de las palas en el valor del parámetro N_e .

Esta situación demuestra que, para los casos donde el plano que contiene las palas es coincidente con la posición del centro de masas del dispositivo, el parámetro N_e no resulta útil para predecir la solución desarrollada en base a una configuración determinada.

La figura 9 se presenta las regiones del plano N_e-k_e donde se evidenció una solución tipo II. La misma queda acotada entre dos series de puntos, una que representa el límite entre las soluciones estables tipo I y tipo II (mismos puntos presentados en la figura 8), y otra que corresponde al límite alcanzado entre las soluciones tipo II y la inestabilidad.

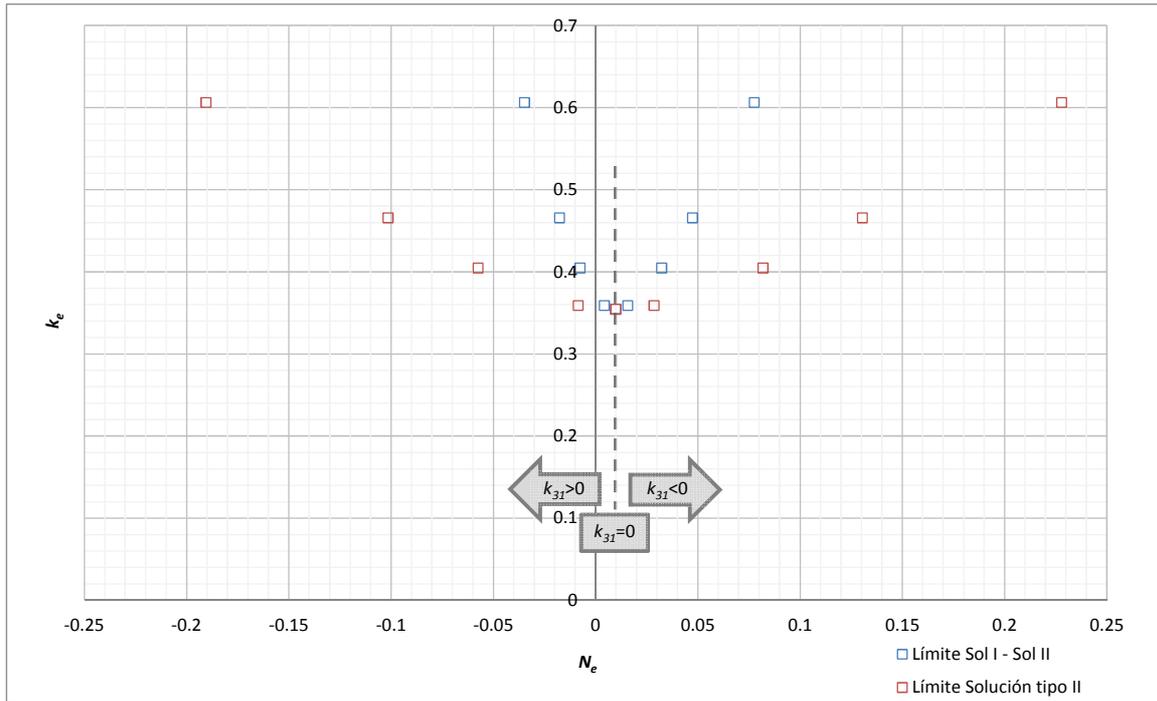


Figura 9: Límites de la región donde se desarrolla una solución tipo II, Caso A

La totalidad de los puntos obtenidos, relacionados con soluciones estables, caen dentro de la región identificada como estable por Piechocki, limitada por $k_e > 0$ y $N_e < 1$. Todos ellos quedan circunscriptos en un rango de valores de N_e y k_e alejado de estos límites.

Se aprecia que los valores del parámetro N_e que representan los límites, tanto entre las soluciones tipo I y tipo II, como entre las soluciones tipo II y la inestabilidad, varían conforme se modifica la distancia del plano que contiene a las palas al centro de masas del dispositivo.

Para las configuraciones correspondientes a k_{31} positivos, el valor límite de N_e , entre la solución tipo II y la inestabilidad, disminuye conforme aumenta el valor de k_e . Para las configuraciones correspondientes a k_{31} negativos, este valor límite de N_e aumenta conforme aumenta el valor de k_e .

Además, se observa que existen configuraciones donde $k_e > 0$ y $N_e < 1$ en las que se evidencia, según el criterio establecido ($\theta_e > 1,4$ rad), una solución inestable. Sin embargo, todos estos casos corresponden a soluciones donde el dispositivo se invierte y alcanza un régimen estable con ángulos de nutación cercanos a π rad (vuelo invertido). Estos casos no resultan de interés para aplicaciones prácticas, por lo que cobra relevancia la delimitación de las regiones donde se establece este tipo de soluciones, quedando este análisis para estudios futuros.

Los valores límite del parámetro N_e para cada valor de k_{31} , que determina las diferentes regiones identificadas en el plano N_e - k_e están asociadas unívocamente a un valor de $\Delta\beta$, que representan la configuración del sistema.

La tabla 6 presenta, para cada valor del parámetro k_{31} estudiado, los valores máximos de $\Delta\beta$ para los cuales el resultado converge a una solución tipo I, es decir, un valor mayor de $\Delta\beta$ que el presentado en la tabla implicaría el establecimiento de una solución tipo II.

Caso A	k_{31}	$\Delta\beta$ [rad]	Solución
	-0,5	0,18	I
	-0,4	0,27	I
	-0,3	0,32	I
	-0,1	0,40	I
	0,0	0,43	I
	0,1	0,42	I
	0,3	0,28	I
	0,4	0,26	I
0,5	0,18	I	

Tabla 6: $\Delta\beta$ máximo para solución tipo I

Comparando el valor de $\Delta\beta$ máximo para un determinado k_{31} , y el valor de $\Delta\beta$ máximo para el valor opuesto de k_{31} , no se observan grandes diferencias, mostrando que el efecto que tiene el parámetro k_{31} en los límites entre la solución tipo I y tipo II, es del mismo orden tanto para valores negativos como positivos. En ambos casos se observa que a medida que aumenta la distancia del plano que contiene a las palas respecto al centro de masas del dispositivo, la tendencia del sistema es converger a soluciones tipo II.

La tabla 7 presenta, para cada valor del parámetro k_{31} estudiado, los valores máximos de $\Delta\beta$ para los cuales el resultado converge a una solución tipo II, es decir, un valor mayor de $\Delta\beta$ que el presentado en la tabla implica el establecimiento de una solución inestable.

Caso A	k_{31}	$\Delta\beta$ [rad]	Solución
	-0,5	0,70	II
	-0,4	0,72	II
	-0,3	0,70	II
	-0,1	0,62	II
	0,0	0,60	II
	0,1	0,61	II
	0,3	0,68	II
	0,4	0,72	II
	0,5	0,75	II

Tabla 7: $\Delta\beta$ máximo para solución tipo II

Los resultados presentados muestran que los valores de k_{31} positivos presentan un efecto estabilizante en la dinámica del pararrotor, en concordancia con lo expuesto por Piechocki en [11]. Además, se observa que los valores de k_{31} negativos también contribuyen a la estabilidad del sistema, sin embargo a partir de un valor límite (en este caso $k_{31}=-0.4$), el aumento de la distancia del plano que contiene a las palas respecto al centro de masas del dispositivo pasa a contribuir negativamente en la estabilidad del pararrotor.

3.2. Caso B

Bajo las premisas detalladas en la metodología de trabajo, el estudio de modelo desarrollado para el caso B ($I_2 > I_3 > I_1$), queda acotado a un rango de valores de k_{31} entre -0,4 y 0,4.

Se destacan nuevamente las dificultades encontradas para definir una configuración geométrica del dispositivo construible que redunde en una relación de momentos de inercia que implica el caso.

La totalidad de las simulaciones realizadas para los modelos desarrollados en este caso presentan soluciones inestables.

Bajo estas dos observaciones se concluye que el caso B no representa interés para las aplicaciones prácticas que se pretenden. Esto concuerda con lo afirmado por Piechocki en [11].

Por estos motivos no se presentan los resultados obtenidos.

3.3. Caso C

Bajo las premisas detalladas en la metodología de trabajo, el estudio de modelo desarrollado para el caso B ($I_1 > I_3 > I_2$), queda acotado a un rango de valores de k_{31} entre -0,26 y 0,26.

Este caso también presenta grandes dificultades para obtener una configuración geométrica que determine la relación de momentos de inercia que establece este caso, incluso dificultades mayores que para el caso B, debiendo recurrir al planteo de geometrías de palas de grandes cuerdas y baja envergadura (alargamientos excesivamente bajos).

De las simulaciones realizadas se desprende que el comportamiento del dispositivo, para este caso, es en general inestable. Es posible, de todos modos, obtener soluciones estables tipo II para los valores más bajos y más altos del parámetro k_{31} (valores extremos del rango analizado), y valores bajos de $\Delta\beta$ ($\Delta\beta < 0,18$ rad). Estas soluciones presentan, en general, valores altos en el ángulo medio de nutación de equilibrio θ_e , y grandes amplitudes en la oscilación del mismo, por lo que no reviste mayor interés para aplicaciones prácticas. Estas observaciones son acordes a lo expuesto por Piechocki en [11].

Es posible determinar configuraciones donde el resultado de la simulación converja a una solución tipo I, pero esta situación únicamente se da para los valores más bajos de k_{31} analizados ($k_{31} < 0$), y valores muy bajos de $\Delta\beta$ ($\Delta\beta < 0,06$ rad).

Las observaciones anteriores muestran que este caso no representa utilidad para las aplicaciones prácticas propuestas, por lo que no se presentan los resultados obtenidos.

3.4. Caso D

El diseño de un modelo que represente una relación de momentos de inercia principales correspondiente al caso D ($I_3 < I_1, I_2$), se caracteriza por una altura del cilindro mayor que en los otros casos. Además, la variación del parámetro k_{31} no conlleva a un cambio en la relación de momentos de inercia. Estas condiciones permiten definir un rango mayor de valores de k_{31} a estudiar, en este caso entre -1,1 y 1,1.

Siguiendo el estudio de los casos presentado por Piechocki [11], para el caso D un valor nulo de k_{31} implica un valor N_e negativo. Para valores de k_{31} positivos, se alcanzan valores negativos y positivos de N_e , para k_{31} negativos, se alcanzan únicamente valores negativos de N_e . Al igual que en el caso A, el parámetro k_e será siempre positivo y, como ya se argumentó, será equivalente para valores opuestos de k_{31} .

Los resultados obtenidos muestran que los tres tipos de soluciones, presentadas en los antecedentes, son alcanzadas en las distintas configuraciones del modelo analizado.

La figura 10 presenta la serie de puntos del plano N_e - k_e donde se estableció una solución tipo I. De la totalidad de los puntos se resaltan aquellos que corresponden a la configuración de referencia ($\Delta\beta=0$), y aquellos que representan el punto límite entre una solución tipo I y una solución tipo II.

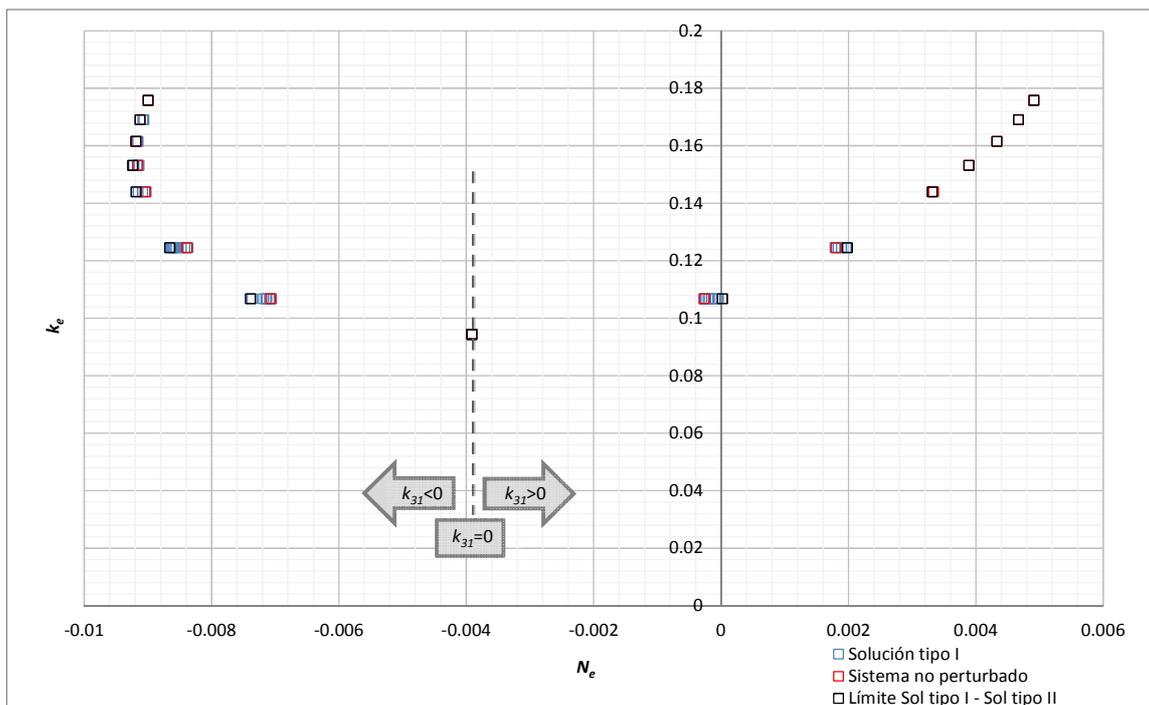


Figura 10: Límites de la región donde se desarrolla una solución tipo I, Caso D

Puede observarse que para un amplio rango de valores del parámetro k_{31} es posible alcanzar soluciones tipo I con configuraciones con una diferencia de ángulo de paso de palas distinto de cero. Sin embargo, para algunos valores k_{31} estas dos series de puntos se superponen. Esta situación indica que, en esas configuraciones, la solución tipo I únicamente se evidencia si la diferencia entre el ángulo de paso de las palas es nula, o de otra manera, la existencia de una diferencia entre el ángulo de paso de las palas implica el establecimiento de una solución tipo II.

La figura 11 se presenta las regiones del plano N_e - k_e donde se evidenció una solución tipo II. La misma queda acotada entre dos series de puntos, una que representa el límite entre las soluciones estables tipo I y tipo II (mismos puntos presentados en la figura 10), y otra que corresponde al límite alcanzado entre las soluciones tipo II y la inestabilidad.

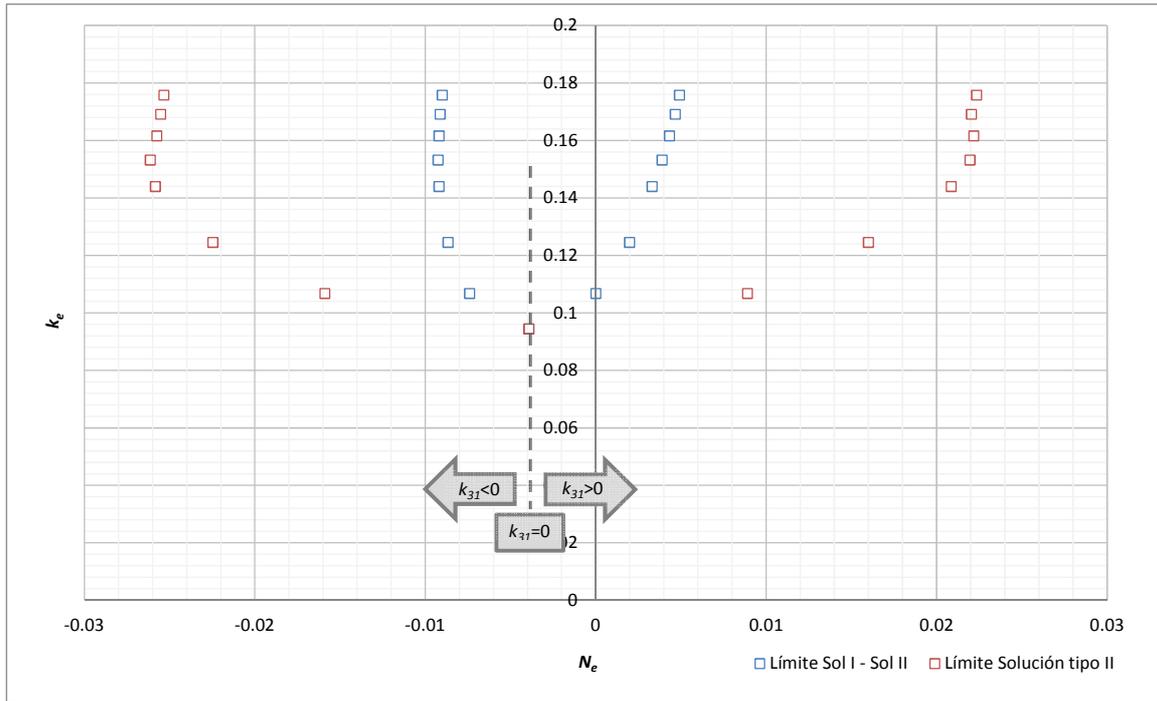


Figura 11: Límites de la región donde se desarrolla una solución tipo II, Caso D

Al igual que en el caso A, se aprecia que la totalidad de los puntos obtenidos, relacionados con soluciones estables, caen dentro de la región identificada como estable por Piechocki, limitado por $k_e > 0$ y $N_e < 1$, todos ellos quedan circunscritos en un rango de valores de N_e y k_e alejado de estos límites.

Todos los límites hallados, entre las soluciones estables, dependen de la distancia entre el plano contiene a las palas y el centro de masas del dispositivo.

En este caso, para las configuraciones correspondientes a k_{31} positivos, el valor límite de N_e , entre la solución tipo II y la inestabilidad, aumenta conforme aumenta k_e , hasta un punto donde el parámetro N_e no aumenta con el incremento del parámetro k_e . De manera similar, para las configuraciones correspondientes a k_{31} negativos, este valor límite de N_e disminuye conforme aumenta k_e , hasta un punto donde el N_e límite no disminuye con el incremento del parámetro k_e .

En el análisis del caso D, también se alcanzan configuraciones donde $k_e > 0$ y $N_e < 1$ en las que se evidencia, una solución estable de vuelo invertido. Como ya se dijo, el análisis de estas regiones del plano N_e - k_e queda pendiente para estudios futuros.

Los valores límite del parámetro N_e para cada valor de k_{31} , que determina las diferentes regiones identificadas en el plano N_e - k_e están asociadas unívocamente a un valor de $\Delta\beta$, que representan la configuración del sistema.

La tabla 8 presenta, para cada valor del parámetro k_{31} estudiado, los valores máximos de $\Delta\beta$ para los cuales el resultado converge a una solución tipo I, es decir, un valor mayor de $\Delta\beta$ que el presentado en la tabla implicaría el establecimiento de una solución tipo II.

Caso D	k_{31}	$\Delta\beta$ [rad]	Solución
	-1,1	0,00	I
	-1,0	0,00	I
	-0,9	0,04	I
	-0,8	0,09	I
	-0,7	0,14	I
	-0,5	0,24	I
	-0,3	0,34	I
	0,0	0,43	I
	0,3	0,33	I
	0,5	0,19	I
	0,7	0,02	I

as	k_{31}	$\Delta\beta$ [rad]	Solución
	0,8	0,00	I
	0,9	0,00	I
	1,0	0,00	I
	1,1	0,00	I

 Tabla 8: $\Delta\beta$ máximo para solución tipo I

Comparando, para un determinado k_{31} y su valor opuesto, el valor de $\Delta\beta$ máximo se observa que para valores negativos de k_{31} es posible alcanzar mayores magnitudes de $\Delta\beta$ que para k_{31} positivos.

Nuevamente se observa que a medida que aumenta la distancia del plano que contiene a las palas respecto al centro de masas del dispositivo, la tendencia del sistema es converger a soluciones tipo II. En ambos casos, existen valores de k_{31} donde la existencia de una diferencia entre el ángulo de paso de las palas, implica el establecimiento de una solución tipo II.

La tabla 9 presenta, para cada valor del parámetro k_{31} estudiado, los valores máximos de $\Delta\beta$ para los cuales el resultado converge a una solución tipo II, es decir, un valor mayor de $\Delta\beta$ que el presentado en la tabla implica el establecimiento de una solución inestable.

Caso D	k_{31}	$\Delta\beta$ [rad]	Solución
	-1,1	0,67	II
	-1,0	0,66	II
	-0,9	0,68	II
	-0,8	0,71	II
	-0,7	0,75	II
	-0,5	0,77	II
	-0,3	0,73	II
	0,0	0,62	II
	0,3	0,72	II
	0,5	0,75	II
	0,7	0,75	II
	0,8	0,74	II
	0,9	0,71	II
	1,0	0,70	II
1,1	0,70	II	

 Tabla 9: $\Delta\beta$ máximo para solución tipo II

Los resultados presentados muestran que tanto los valores de k_{31} positivos como los negativos presentan un efecto estabilizante en la dinámica del pararrotor, en concordancia con lo expuesto por Piechocki en [11]. Además, se observa que en ambos casos, a partir de un valor límite ($k_{31}=-0,5$ y $k_{31}=0,7$), el aumento de la distancia del plano que contiene a las palas respecto al centro de masas del dispositivo pasa a contribuir negativamente en la estabilidad del pararrotor.

4. CONCLUSIONES

Se determinaron los límites de las distintas regiones estables del plano $N_e - k_e$, para los modelos desarrollados para cada caso según la relación de sus momentos de inercia principales. Se utilizó, para ello, la herramienta de simulación numérica desarrollada por Piechocki [11], que resuelve las ecuaciones completas de la dinámica del pararrotor. La misma presenta ciertas limitaciones para el objetivo propuesto, en particular, los elevados tiempos necesarios para la simulación, adquisición y procesamiento de resultados.

Se desarrolla un bloque lógico, que se adicionan al simulador original, que identifica las distintas soluciones posibles, detecta su estabilización (en caso de ser soluciones estables), y detiene automáticamente la simulación.

También se desarrolla un *script* que automatiza el proceso de carga de datos iniciales; ejecución de la simulación; barrido de variables de estudio; y la adquisición, almacenamiento, y procesamiento de resultados.

Además, se adiciona al *script* asociado a la carga de datos iniciales del simulador original, el cálculo del aporte de la variación del parámetro k_{31} en el cálculo de los momentos de inercia principales.

Estos desarrollos realizados sobre la herramienta de simulación numérica repercuten en la reducción considerable de los tiempos de simulación y análisis de los casos propuestos, automatizando todo el procedimiento, almacenando los resultados procesados en un formato que resulta práctico para su análisis en hojas de cálculo, y permitiendo chequear que las simulaciones fueron detenidas en el tiempo pretendido.

Se diseñaron modelos construibles para cada caso presentado, se evidenciaron dificultades para obtener configuraciones geométricas coherentes con la relación de momentos de inercia determinada por los casos B y C.

Se realizaron numerosas simulaciones para cada uno de los modelos desarrollados, los resultados de cada una de ellas representa un punto en el plano N_e - k_e .

Los resultados muestran que el comportamiento del modelo correspondiente caso B es inestable. El análisis de numerosas configuraciones del modelo concuerda con lo determinado por Piechocki en [11]. El caso no resulta de interés para aplicaciones prácticas.

Una situación similar ocurre con los resultados obtenidos para el caso C. Si bien en este caso es posible alcanzar soluciones estables, las mismas resultan de configuraciones particulares, donde la distancia del plano que contiene a las palas respecto al centro de masas del dispositivo es alta, y presentan en general, altos valores promedio y grandes amplitudes en la oscilación del ángulo de nutación θ_e . Además, se resalta que la relación de momentos de inercia que establece el caso ($I_1 > I_3 > I_2$), fue la que más dificultades presentó en el diseño de un modelo construible, debiendo recurrir al planteo de geometrías de palas de grandes cuerdas y baja envergadura (alargamientos excesivamente bajos).

Los casos que revisten mayor interés representan son aquellos donde el momento de inercia principal respecto del eje de rotación propia es el mayor, caso A; o el menor, caso D.

Para ambos casos se presentan la serie de puntos obtenidos de donde se destacan los valores límite entre las región estables de solución tipo I y solución tipo II. También queda delimitada, para ambos casos, la región donde se establece la solución tipo II, donde se presentan los valores de N_e correspondientes al valor de $\Delta\beta$ máximo alcanzado, un valor mayor de $\Delta\beta$ implica la inestabilidad del sistema.

También se presenta para ambos casos, buscando ponderar el efecto del parámetro k_{31} en la estabilidad del pararrotor, los valores de $\Delta\beta$ máximo alcanzado en cada configuración analizada.

Para el caso A, los resultados presentados muestran que, respecto a los límites entre la solución tipo I y tipo II, a medida que aumenta la distancia del plano que contiene a las palas respecto al centro de masas del dispositivo, la tendencia del sistema es converger a soluciones tipo II. Respecto al límite entre las soluciones tipo II y la inestabilidad, los valores de k_{31} positivos presentan un efecto estabilizante en la dinámica del pararrotor. Los valores de k_{31} negativos aportan a la estabilidad del sistema, hasta un valor límite ($k_{31}=-0,4$), a partir del cual el sistema soporta valores de $\Delta\beta$ menores.

Para el caso D, los resultados presentados muestran que, respecto a los límites entre la solución tipo I y tipo II, a medida que aumenta el parámetro k_{31} , la tendencia del sistema es converger a soluciones tipo II. Respecto al límite entre las soluciones tipo II y la inestabilidad, tanto los valores de k_{31} positivos como los negativos presentan un efecto estabilizante en la dinámica del pararrotor. Se observa también que en ambos casos, a partir de un valor límite ($k_{31}=-0,5$ y $k_{31}=0,7$), el aumento de la distancia del plano que contiene a las palas respecto al centro de masas del dispositivo pasa a contribuir negativamente en la estabilidad del pararrotor.

Por último, en ambos casos se observa que existen configuraciones donde $k_e > 0$ y $N_e < 1$ (región estable), en las que se evidencian soluciones en las que el dispositivo se invierte y pasa a una condición estable de vuelo invertido. Su análisis en profundidad es objetivo de estudios futuros.

Si bien se determinaron los límites entre las soluciones estables para modelos correspondientes a los casos que resultan de interés para aplicaciones prácticas, quedan regiones del plano estable pendientes de análisis. Las herramientas desarrolladas serán de gran utilidad para estos estudios futuros.

REFERENCIAS

- [1] A. Rosen and D. Seter, “Vertical autorotation of a single-winged samara”, Journal of applied mechanics, vol. 58, no. 4, pp. 1064–1071, 1991.
- [2] D. Seter and A. Rosen, “Stability of the vertical autorotation of a single-winged samara”, Journal of applied mechanics, vol. 59, no. 4, pp. 1000–1008, 1992.
- [3] P. Crimi, “Analysis of samara-wing decelerator steady-state characteristics”, Journal of Aircraft, vol. 25, no. 1, pp. 41–47, 1988.

- [4] B. Roccia, S. Preidikman, L. Ceballos, and J. Massa, “Estudio de la aerodinámica no lineal e inestacionaria de semillas voladoras autorrotantes”, 2014.
- [5] K. Fregene, D. Sharp, C. Bolden, J. King, C. Stoneking, and S. Jameson, “*Autonomous guidance and control of a biomimetic single-wing mav*”, in AUVSI Unmanned Systems Conference. Assoc. for Unmanned Vehicle Systems International Arlington, VA, 2011, pp. 1–12.
- [6] S. Kang, J. Wang, and J. Shan, “*Stability analysis of a visibility-reduced monocopter*”, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, vol. 230, no. 4, pp. 653–667, 2016.
- [7] B. Ahmed, H. R. Pota "Dynamic Compensation for Control of a Rotary wing UAV Using Positive Position Feedback", Springer Science + Business Media B.V. 2010.
- [8] Steiner, T. J. and Young, L. A. “*Rotary wing decelerator use on Titan*”, IPPW8, Portsmouth, USA, 2011.
- [9] A. Koehl, H. Rafaralahy, M. Boutayeb and B. Martinez, “Wind-Disturbance and Aerodynamic Parameter Estimation of an Experimental Launched Micro Air Vehicle Using an EKF-like Observer”, 49th IEEE Conference on Decision and Control December, 2010
- [10] V. Nadal Mora, “*Comportamiento aerodinámico de sondas atmosféricas en entornos aeroportuarios*”. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, España, May 2005.
- [11] J. Piechocki, “Estudio de la dinámica del vuelo de un decelerador aerodinámico basado en el concepto de pararotor”. Tesis doctoral, Universidad Nacional de La Plata, Argentina, 2012.
- [12] V. Nadal-Mora, A. Sanz-Andrés and A. Cuerva, “*Model of the Aerodynamic Behavior of a Pararotor*”. Journal of Aircraft, 43(6), 1893–1903. 2006. <http://doi.org/10.2514/1.21435>
- [13] J. Piechocki, V. Nadal Mora and A. Sanz Andrés, “*Pararotor Dynamics: Center of Mass Displacement from the Blade Plane—Analytical Approach*”. Journal of Aircraft, 51(2), 651–660. 2014. <http://doi.org/10.2514/1.C032378>
- [14] J. Piechocki, V. Nadal Mora and A. Sanz Andrés, “*Numerical simulation of pararotor dynamics: Effect of mass displacement from blade plane*”. Aerospace Science and Technology, 55. 2016. <http://doi.org/10.1016/j.ast.2016.04.004>
- [15] V. Nadal Mora and A. Sanz-Andres, “*Stability Analysis of a Free Falling Pararotor. Journal of Aircraft*”, Vol. 43, No. 4, July-August 2006, pp. 980-986.
- [16] V. Nadal Mora, J. Piechocki and A. Sanz Andrés, “*Experimental research on a vertically falling rotating wing decelerator model*”. AIAA 2007-2538. 19th AIAA Aerodynamic Decelerator Systems Technology Conference and Seminar. 2007.
- [17] J. Piechocki, V. Nadal Mora y A. Sanz Andrés, “Estudio teórico del efecto del desplazamiento del plano que contiene a las palas con respecto al centro de masas en la dinámica del vuelo de un desacelerador aerodinámico de alas rotatorias”. I Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica CAIM, Bahía Blanca, 2008.