

SIMULACIONES INESTACIONARIAS DE PERFILES AERODINÁMICOS RÍGIDOS Y FLEXIBLES A NÚMEROS DE REYNOLDS ULTRA-BAJOS ($RE < 10000$)

D. Antonelli^{a,c}, C. Sacco^b y J. Tamagno^a

^a*Departamento de Aeronáutica, Universidad Nacional Córdoba, Av. Vélez Sarfield 1611, (5000)
Córdoba, Argentina*

^b*Instituto Universitario Aeronáutico Av. Fuerza Aérea S/n, (5000) Córdoba, Argentina*

^c*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas-CONICET, Argentina*

Palabras Clave: CFD, Bajo Reynolds, Perfiles aerodinámicos flexibles, Interacción fluido-estructura, Aerodinámica, Flujo inestacionario.

Resumen. La interacción entre un ala flexible y el fluido que la rodea es de considerable importancia en el diseño de Micro Vehículos Aéreos (MAV). El propósito de este estudio es realizar simulaciones numéricas bidimensionales con el objeto de examinar el comportamiento de los coeficientes aerodinámicos de perfiles rígidos y flexibles en flujos no estacionarios. Se consideran perfiles simétricos clásicos sometidos a dos tipos de cinemática de vuelo diferentes: heaving y flapping. Se estudia la influencia de parámetros fundamentales como los números de Reynolds y de Strouhal, las frecuencias del movimiento, la flexibilidad estructural, el factor de interacción fluido-estructura, etc. No obstante la existencia, en líneas generales, de cierta semejanza de flujo entre los perfiles rígidos y flexibles, se observa que la flexibilidad estructural tiene un impacto significativo en la generación de la propulsión aerodinámica y su eficiencia. Las simulaciones de este estudio requieren soluciones numéricas de las ecuaciones de conservación para flujos laminares incompresibles a las cuales se acoplan algoritmos iterativos aplicables al estudio de la interacción fluido-estructura.

1. INTRODUCCIÓN

La importancia del flujo a números de Reynolds ultra-bajos se debe a las aplicaciones tecnológicas como MAV (Micro Vehículos Aéreos por sus siglas en inglés), cuyas dimensiones máximas son de 0,15[m]. Dichas aplicaciones pueden conducir a notables mejoras en la teledetección y la recopilación de información tanto en aplicaciones civiles como militares. Es necesario un profundo estudio de los fenómenos del vuelo a este régimen para obtener la mayor eficiencia posible, ya que recursos tecnológicos a esta escala son limitados.

Debido a los efectos del número de Reynolds, las características aerodinámicas tales como sustentación, resistencia y empuje cambian sustancialmente de microvehículos aéreos a vehículos aéreos no tripulados convencionales. De hecho, en la naturaleza, aves e insectos batan sus alas para generar sustentación y permanecer fijos en una posición, o producir empuje con el objetivo de avanzar hacia adelante. Los principales vuelos con propulsión son: *heaving* y *flapping* (vuelos con corriente libre), y *hovering* (vuelo sin corriente libre).

Los mecanismos aerodinámicos del vuelo inestacionario, tales como la generación de vórtices desde el borde de ataque (LEV *Leading Edge Vortex*), desde el borde de fuga (TEV *Trailing Edge Vortex*), la interacción ala-estela, el aprovechamiento del cambio de actitud por perfil, afectan significativamente la generación de las fuerzas aerodinámicas. Otro mecanismo notable y de gran influencia observado en aves e insectos es la flexibilidad del ala.

Se han realizado investigaciones en esta área y las más significativas que se pueden nombrar son: (Guerrero, 2008) realizó estudios aerodinámicos inestables a ultra-bajo Reynolds en configuraciones aerodinámicas 2D y 3D utilizando la sección de un perfil NACA 0012; (Combes y Daniel, 2005) han demostrado que una variedad de insectos poseen una anisotropía en la rigidez en las estructuras del ala, en base a resultados de pruebas estáticas.

Estudios experimentales y numéricos realizados por (Kang y Shyy, 2012), (Kang et al., 2011), (Aono et al., 2009) han demostrado que la flexibilidad en el sentido de la cuerda afecta a la distribución de las fuerzas aerodinámicas de sustentación y empuje. Si la placa sufre una deformación, conlleva a una modificación de la geometría efectiva, lo cual combinado con el ángulo de ataque puede ajustarse para una óptima generación de empuje. Además afirman, que es posible combinar una gama de flexibilidades sobre la envergadura con diferentes distribuciones de flexibilidades sobre la cuerda para mejorar la propulsión.

La generación de la fuerza aerodinámica causada por la flexibilidad estructural, es sin duda esencial para cambiar comportamientos habituales de empuje y eficiencia. Estudios como los de (Olivier, 2010), (Heathcote y Gursul, 2005), (Chandar y Damodaran, 2009), (Naderi et al., 2016), analizaron perfiles rígidos y flexibles bajo movimiento sinusoidal (*flapping*) y alas tridimensionales flexibles de insectos, en condiciones de vuelo realistas tales como el vuelo hacia adelante y/o maniobras de forma rápida.

En el presente trabajo se presentan simulaciones numéricas bidimensionales (2D) con el objeto de examinar el comportamiento de los coeficientes aerodinámicos de perfiles rígidos y flexibles en flujos no estacionarios. Se consideran perfiles simétricos clásicos sometidos a dos tipos de cinemáticas de vuelo diferentes: *heaving* y *flapping*. Se estudia la influencia de parámetros fundamentales como el número de Reynolds y el número de Strouhal, la flexibilidad estructural, el factor de interacción fluido-estructura etc., sobre las características propulsoras de los perfiles. Se analiza además la topología de la estela y la influencia de los vórtices desprendidos desde el borde de ataque (LEV) y de fuga (TEV).

2. METODOLOGÍA

Los números adimensionales pertinentes al vuelo inestacionario de aves e insectos, también se consideran válidos para los MAV. Uno de los principales parámetros del flujo inestacionario es el número de Strouhal, que se define como $St = 2f_h h_a / U$, donde f_h es la frecuencia del movimiento vertical y h_a la media amplitud de dicho movimiento. Por lo tanto, el número de Strouhal expresa la relación entre la velocidad del movimiento inducido con la velocidad de la corriente libre U . La frecuencia reducida dada por $k = \pi f_h c / U$ la cual representa la relación del tiempo que tarda una partícula en recorrer la cuerda del perfil c con el período de movimiento inducido. A continuación, otros parámetros también fundamentales de la aerodinámica inestacionaria se pueden expresar como:

$$C_L(t) = \frac{L(t)}{\frac{1}{2}\rho_f U^2 c} \quad (1)$$

donde C_L es el coeficiente de sustentación, ρ_f es la densidad del fluido y c la cuerda. El coeficiente de tracción se define por,

$$C_T(t) = -C_D(t) = \frac{T(t)}{\frac{1}{2}\rho_f U^2 c} \quad (2)$$

donde $T = -D$ es la tracción y D la resistencia. El coeficiente de potencia introducida es

$$C_P(t) = \frac{P(t)}{\frac{1}{2}\rho_f U^3 c} \quad (3)$$

donde P es la potencia. La eficiencia de propulsión está dada por

$$\eta = \frac{\bar{T}U}{\bar{P}} = \frac{\bar{c}_t}{\bar{c}_p} \quad (4)$$

y representa la relación entre el empuje generado y la potencia introducida. \bar{c}_t y \bar{c}_p son los coeficientes de tracción y potencia promedios respectivamente, \bar{T} y \bar{P} son la tracción y la potencia promedio respectivamente.¹

Los parámetros adimensionales de problemas de interacción fluido-estructura (FSI por sus siglas en inglés *Fluid-Structure Interaction*) son, (Olivier, 2010): flexibilidad definida por,

$$\delta^* = \frac{\rho_f (f_h h_a)^2 c^3}{EI} \quad (5)$$

la que relaciona la presión dinámica con la rigidez estructural y el factor de intensidad de interacción FSI, que se define por,

$$\Sigma = \frac{\rho_f h_a}{\rho_s e} \quad (6)$$

donde ρ_s es la densidad de la estructura y e su espesor. Dicho coeficiente representa la relación entre la inercia estructural y la presión fluido-dinámica. La relación de densidad está dada por

$$\rho^* = \frac{\rho_s}{\rho_f} \quad (7)$$

¹Los coeficientes promedios se calculan como: $\bar{c}_x = \frac{1}{\mathbb{T}} \int_t^{t+\mathbb{T}} C_X(t) dt$ donde \mathbb{T} es el período del movimiento inducido y $C_X(t)$ puede ser $P(t)$, $T(t)$, $C_L(t)$, $C_T(t)$, etc.

Las cinemáticas de perfiles 2D utilizadas en el presente trabajo, están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$h(t) = h_a \sin(2\pi f_h t + \chi_h) \quad (8)$$

donde $h(t)$ es el movimiento vertical,

$$\alpha(t) = \alpha_a \sin(2\pi f_\alpha t + \chi_\alpha) \quad (9)$$

donde $\alpha(t)$ es el movimiento de cabeceo, χ_h y χ_α son los ángulos de fase. El centro de rotación del perfil se ubica sobre el borde de ataque (0 %c) en todos los casos estudiados.

2.1. Método Numérico

El código computacional de interacción fluido-estructura utilizado fue desarrollado por los autores en lenguaje FORTRAN. Los detalles se presentan a continuación.

2.1.1. Módulo Fluido-dinámico

Las ecuaciones de gobierno del problema fluido-dinámico son las ecuaciones de Navier-Stokes 2D bajo las hipótesis de flujo incompresible-laminar.

Para poder implementar el movimiento del perfil, es necesario introducir dicho movimiento a la malla de discretización fluido-dinámica. Por lo cual, las ecuaciones de Navier-Stokes deben formularse en forma Euleriana-Lagrangeana Arbitraria ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*), donde dichas ecuaciones se plantean sobre un marco de referencia inercial que tiene en cuenta el movimiento de la malla con velocidad \mathbf{u}_{mf} , (Donea y Huerta, 2003). La conservación de la masa y el momento en un dominio de análisis Ω con contornos $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ y sobre el intervalo de tiempo de análisis (t_0, t_f) se escriben como,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial t} + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_f} \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (11)$$

donde \mathbf{u} es el vector velocidad, ν es la viscosidad cinemática, p la presión, \mathbf{f}_e las fuerzas externas y $\mathbf{c} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{mf}$ es la velocidad convectiva que representa la diferencia entre la velocidad del fluido y la velocidad de la malla.

Las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_c \quad \text{in } \Gamma_u \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t} \quad \text{in } \Gamma_\sigma \end{aligned} \quad (12)$$

donde $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_f$ es el tensor de tensiones fluido-dinámico y \mathbf{n} es un vector normal al contorno. Las condiciones iniciales para un intervalo de tiempo $t \in (t_0, t_f)$, son:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 \quad \text{in } t_0 \\ p &= p_0 \quad \text{in } t_0 \end{aligned} \quad (13)$$

Las ecuaciones que se plantearon previamente no pueden ser resueltas numericamente en forma estandar debido a que la hipótesis de incompresibilidad se transforma en una restricción del campo de movimiento. Existen diversos algoritmos que permiten subsanar la dificultad mencionada, y entre ellos se encuentra el algoritmo de Pasos Fraccionados. Este método satisface la

condición LBB, ya que se utiliza el mismo orden de aproximación para las velocidades que para la presión. Para aplicar el algoritmo de pasos fraccionados, la Ec. 11 se divide en dos partes. Con motivos de simplificar el análisis, la velocidad de la malla es $\mathbf{u}_{mf} = 0$,

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \delta t \left[\mathbf{u}^{n+\theta} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\theta} + \gamma \frac{1}{\rho_f} \nabla p^n - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+\theta} + \mathbf{f}^{n+\theta} \right] \quad (14)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}}^{n+1} - \frac{\delta t}{\rho_f} (\nabla p^{n+1} - \gamma \nabla p^n) \quad (15)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}$ se denomina velocidad fraccionada. Posteriormente, si se toma la divergencia de la Ec. 15 y se aplica la ecuación de continuidad se obtiene,

$$\nabla^2 (p^{n+1} - \gamma p^n) = \frac{\rho_f}{\delta t} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}^{n+1} \quad (16)$$

A través de esta ecuación se calcula la presión. Además, γ es un parámetro numérico de tal manera que sus valores de interés son 0 y 1. El parámetro θ determina el tipo de aproximación temporal. Los valores de interés para θ son: $\theta = 1/2$ correspondientes a un esquema de Crank-Nicholson, $\theta = 1$ a un esquema de Euler hacia atrás (implícito) y $\theta = 0$ correspondiente a un esquema de Euler hacia adelante (explícito).

El método utilizado para discretizar las ecuaciones de gobierno es el Método de Elementos Finitos que resulta óptimo para este tipo de aplicaciones (Lohner, 2001). Los elementos utilizados son triángulos de tensión constante. El esquema resultante es de primer orden ($\gamma = 0$) y la discretización temporal se realiza a través del método de Euler hacia adelante ($\theta = 0$). Las funciones de forma utilizadas son $(\boldsymbol{\psi}_h, \phi_h) \in \Psi_h \times \Phi_h$ y la discretización de las ecuaciones resulta,

$$\frac{1}{\delta t} (\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) = \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \nu (\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) - (\mathbf{f}_e^n, \boldsymbol{\psi}_h) \quad (17)$$

$$(\nabla p_h^{n+1}, \nabla \phi_h) = \frac{\rho_f}{\delta t} [(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \nabla \phi_h) - (\nabla \mathbf{u}_h^n, \phi_h)] \quad (18)$$

$$(\mathbf{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) = (\hat{\mathbf{u}}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \frac{\delta t}{\rho_f} (\nabla p_h^{n+1}, \phi_h) \quad (19)$$

donde el subíndice h significa que las ecuaciones se aplican sobre un elemento. Ψ_h y Φ_h son espacios funcionales asociados a la partición del dominio Ω , llamada partición de elementos finitos Ω_h . El último sistema de ecuaciones es semi-implícito porque las Ecs. 17 y 19 son explícitas y la Ec. 18 para el cálculo de la presión, es implícita².

La discretización de los términos convectivos produce inestabilidades numéricas, por lo tanto, se debe implementar algún método de estabilización. En este trabajo se utiliza el método Proyección Ortogonal de las Subescalas o *Orthogonal Subgrid Scale* (OSS) (Codina, 2000), (Principe y Codina, 2009). Luego, la expresión para el término convectivo de estabilización STB_u es:

$$STB_u = \tau_1 (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \pi_h^n, \mathbf{u}_h^n \nabla \boldsymbol{\psi}_h) \quad (20)$$

donde π_h^n es la proyección de los términos convectivos y se define en la Ec.25. Esta ecuación debe ser insertada en la ecuación de cantidad de movimiento 17 y es evaluada en el tiempo t^n , por lo que es de carácter explícito.

²La notación de las ecuaciones significa: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} d\Omega$

Luego, el término de estabilización para la presión STB_p , que se debe insertar en la Ec. 18 es:

$$STB_p = -(\tau_2(\nabla p^n - \xi_h^n), \nabla \phi_h) \quad (21)$$

donde ξ_h^n es la proyección del gradiente de las presiones y está definido en la Ec. 26. Además, se observa que dicha ecuación se evalúa en el tiempo t^n , por lo que es de carácter explícito.

Finalmente, el esquema estabilizado completo, donde además se tiene en cuenta el movimiento de la malla con velocidad \mathbf{u}_m es,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t}(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) &= \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - (\mathbf{c}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) \\ &- \nu(\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) - (\mathbf{f}_e^n, \boldsymbol{\psi}_h) - (\tau_1(\mathbf{c}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \pi_h^n), \nabla \mathbf{c}_h^n \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}_h) \end{aligned} \quad (22)$$

$$(\nabla p_h^{n+1}, \nabla \phi_h) = \frac{\rho_f}{\delta t + \tau_2} [(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \nabla \phi_h) - (\nabla \mathbf{u}_h^n, \phi_h)] + \frac{\tau_2}{\delta t + \tau_2} (\nabla \xi_h^n, \nabla \phi_h) \quad (23)$$

$$(\mathbf{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) = (\hat{\mathbf{u}}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \frac{\delta t}{\rho_f} (\nabla p_h^{n+1}, \phi_h) \quad (24)$$

$$(\pi_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) = (\mathbf{c}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) \quad (25)$$

$$(\xi_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) = (\nabla p_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) \quad (26)$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_h \in \tilde{\Psi}_h$ y τ_1, τ_2 son coeficientes de estabilización. El sistema de ecuaciones Ecs. 22, 24, 25, 26 es resuelto en forma explícita a través de la matriz de masa condensada, y el sistema resultante de la Ec. 23 se resuelve en forma implícita, a través del método de gradientes conjugados con pre-condicionador diagonal.

Las condiciones de contorno que se aplican al sistema son,

- Velocidad impuesta: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_c$
- No deslizamiento: $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- Tracción nula: $\mathbf{n} \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n}) = 0$

El movimiento de la malla se realiza a través de un algoritmo que suaviza la malla en iteraciones sucesivas, luego de la deformación impuesta por el movimiento del cuerpo (Ecs. 8 y 9). Los nodos que son móviles y fieles a la cinemática impuesta, serán aquellos que están en la superficie del cuerpo y estarán exentos de entrar en la suavización de la malla. El algoritmo se divide en dos partes, la primera consiste en una suavización que reorganiza los nodos más lejanos de manera que los traslada a una posición correcta, y la segunda, de una optimización más robusta, que mediante el cálculo de las métricas de cada elemento, restaura elementos altamente distorsionados y hasta invertidos. Más detalles de dicho algoritmo se encuentra en (Canann et al., 1998).

2.1.2. Módulo estructural

Las ecuación de gobierno del modelo estructural es:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial w^2}{\partial x^2} \right) = -\mu_s \frac{\partial w^2}{\partial t^2} + q(x) \quad (27)$$

donde w es el desplazamiento transversal, μ_s es la masa por unidad de longitud, E es el módulo de Young, I es el momento de inercia y $q(x)$ la carga distribuida transversal.

Los cálculos realizados para una superficie de sustentación flexible compuesta de una placa plana elástica sometida a un flujo con alto número de Reynolds y para varias frecuencias de movimiento, (Kang et al., 2011) muestran que el modelo de una viga de Euler-Bernoulli lineal es suficiente para el análisis de la interacción entre el fluido y la estructura.

En este trabajo se incorpora el modelo de viga de Euler-Bernoulli para resolver la ecuación 27 utilizando el método de elementos finitos (FE). No se considera el amortiguamiento estructural y se asumen dos grados de libertad en cada nodo, el desplazamiento y la flexión. La solución aproximada por FE (Cook et al., 2001), (Wright y Cooper, 2007) está dada por los siguientes pasos:

- Determinar las propiedades dinámicas de cada elemento como sus matrices de rigidez y de masa a través de la dinámica de Lagrange. Con el fin de escribir la energía de deformación y los términos de energía cinética para cada elemento, se tiene que expresar la variación del desplazamiento dentro del elemento como una función de los desplazamientos nodales. Dicha variación se expresa como polinomios cúbicos de Hermite. Luego, es posible determinar las matrices elementales de rigidez y masa.
- Una vez obtenidas las matrices elementales, se procede a ensamblar dichas matrices, para conformar las matrices globales de rigidez y masa, de las cuales se pueden determinar los modos y frecuencias. Además se debe ensamblar el vector de cargas externas. Luego, la ecuación general a resolver es:

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}_r \mathbf{w} = \mathbf{R} \quad (28)$$

donde \mathbf{M}_r es la matriz de masa global, \mathbf{w} es el vector de desplazamientos, \mathbf{K}_r es la matriz de rigidez global y \mathbf{R} representa el vector de cargas externas. La conformación de \mathbf{R} se detalla en la próxima sección.

- Se resuelve la eq. 28 mediante el método de integración temporal de Newmark, (Vazquez, 2007).

2.1.3. Estrategia de Acoplamiento

La interacción fluido-estructura está basada en un proceso particionado de solución, en el que las ecuaciones diferenciales parciales de gobierno del fluido y la estructura se resuelven de forma independiente y espacialmente acopladas, a través de una interfaz (Degroote, 2010). En cada paso de tiempo, el solver del fluido \mathcal{F} y el solver estructural \mathcal{S} , se invocan en iteraciones sucesivas hasta obtener una convergencia adecuada de los desplazamientos, para luego avanzar al siguiente paso de tiempo.

Dado que el fluido y la estructura han sido modeladas en base a la teoría de medios continuos, la interfaz entre ambos no es la excepción. Para representar el movimiento del fluido

incompresible de este trabajo, sólo son necesarias la conservación de la masa y la conservación de la cantidad de movimiento. Estas dos ecuaciones conducen a las siguientes condiciones sobre la interfaz entre las mallas del fluido y la estructura, (Olivier, 2010):

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{ms} &= \mathbf{u}_{mf} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n} &= \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s \cdot \mathbf{n}\end{aligned}\quad (29)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal al contorno del perfil aerodinámico. El subíndice f significa fluido y s estructura. Las condiciones de acoplamiento implican que las velocidades y las cargas normales, son iguales entre ambas mallas y por ende la conservación de la energía. A través del principio de trabajos virtuales de las fuerzas aerodinámicas $\delta W_a = \mathbf{F}_a^T \Delta \mathbf{U}_a$ y los de las fuerzas estructurales $\delta W_e = \mathbf{F}_e^T \Delta \mathbf{U}_e$, se puede forzar a la conservación de la energía total,

$$\delta W_e = \delta W_a \quad (30)$$

Si existe una matriz $\bar{\mathbf{H}}$ que relaciona las posiciones de los nodos de la malla estructural \mathbf{X}_e con los nodos de la malla aerodinámica $\mathbf{X}_a = \bar{\mathbf{H}}\mathbf{X}_e$, luego a través de la Ec. 30 se mantiene que,

$$\mathbf{F}_e = \bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{F}_a \quad (31)$$

De esta forma, la imposición de la conservación de los trabajos virtuales relaciona la transferencia de las variables cinemáticas desde la malla estructural a la malla aerodinámica, y las fuerzas en sentido contrario (más detalles en (Maza et al., 2012)).

En el código, las condiciones de acoplamiento se implementan mediante el método llamado *surface tracking* presentado en (Cebal y Lohner, 1997). El método *surface tracking* sugiere que al inicio de la simulación se determinan las posiciones relativas entre los nodos aerodinámicos y estructurales (matriz $\bar{\mathbf{H}}$) y luego, estas posiciones se conservan a lo largo de la simulación de modo que las distancias relativas entre las dos mallas no varían. Y por otro lado, las cargas aerodinámicas se convierten en cargas nodales en la estructura siendo el vector de todas las fuerzas externas aplicadas \mathbf{R} ,

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i = \bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_i \quad (32)$$

donde \mathbf{F}_i son las fuerzas inerciales.

El acoplamiento entre ambos solvers \mathcal{F} y \mathcal{S} , se implementa a través de un esquema particionado de Gauss-Seidel. Con el fin de esquematizar el algoritmo de interacción fluido-estructura utilizado, se presenta una secuencia de pasos descriptivos que parte de valores conocidos para la estructura, el fluido y la malla, en un tiempo t_n .

-
1. Avanzar en el paso de tiempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.
 2. Setear la iteración $k = 1$
 3. Calcular el desplazamiento de la interfaz fluido-estructura mediante un predictor estructural o de Neumann-Dirichlet: Consiste en determinar el desplazamiento de la estructura \mathbf{w}_k^{n+1} mediante una carga fluido-dinámica de presión,
 - Carga de presión: $\mathbf{p}_{n+1} = 2\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}$ para $n \geq 2$.
 4. Iteraciones del acoplamiento fluido-estructura:
 - (a) Movimiento de la malla:
 - Se transfiere \mathbf{w}_k^{n+1} al solver de movimiento de la malla y mediante el método *surface tracking*, se produce la transferencia de dicho desplazamiento a los nodos aerodinámicos. Además se calculan las velocidades de la malla fluido-dinámica $\mathbf{u}_{mf_k}^{n+1}$.

(b) Resolver las ecuaciones fluido-dinámicas:

- Transferir la velocidad de la malla $\mathbf{u}_{mf_k}^{n+1}$ al solver fluido-dinámico. Encontrar las velocidades \mathbf{u}_k^{n+1} y las presiones \mathbf{p}_k^{n+1} .

(c) Resolver el código estructural:

- Transferir las cargas fluido-dinámicas $\bar{\sigma}_f$ y de inercia al código estructural, y encontrar el desplazamiento \mathbf{w}_{k+1}^{n+1} .

(d) Fase de relajación mediante el método de Aitken:

- Calcular el parámetro óptimo de relajación ω_k ,

$$\omega_k^{n+1} = -\omega_{k-1}^{n+1} \frac{(\mathbf{r}_{k-1}^{n+1})^T (\mathbf{r}_k^{n+1} - \mathbf{r}_{k-1}^{n+1})}{(\mathbf{r}_{k-1}^{n+1} - \mathbf{r}_{k-2}^{n+1})^T (\mathbf{r}_k^{n+1} - \mathbf{r}_{k-1}^{n+1})}$$

donde $\mathbf{r}_k^{n+1} = \tilde{\mathbf{w}}_{k+1}^{n+1} - \mathbf{w}_k^{n+1}$ se define como el residuo.

- Relajación con la posición predecida para la interfaz,

$$\tilde{\mathbf{w}}_{k+1}^{n+1} = (1 - \omega_k) \tilde{\mathbf{w}}_k^{n+1} + \omega_k \mathbf{w}_{k+1}^{n+1}$$

(e) Avanzar en la iteración $k = k + 1$.

(f) Chequear la convergencia con $\|\mathbf{r}_k^{n+1}\| \leq \epsilon_0$, donde $\|\mathbf{r}_k^{n+1}\|$ es la norma del residuo del esquema de Aitken y ϵ_0 una tolerancia impuesta. Si converge ir al paso (5), si no volver al paso (4).

5. Chequear el paso de tiempo. Si el tiempo de simulación no ha terminado: volver al paso (1). Si ha terminado: fin de la simulación.

3. VERIFICACIÓN DEL CÓDIGO NUMÉRICO

3.1. Verificación del código estructural y fluido-dinámico

Como verificación del solver fluido-dinámico se analizan los parámetros aerodinámicos de un perfil rígido NACA 0012 sometido a movimiento *flapping*. Se consideran los siguientes parámetros: frecuencia de *pitching* y *heaving* $f_\alpha = f_h = 0,225Hz$, frecuencia reducida $k = 0,7096$, amplitud media de *heaving* $h_a = 1$, ángulo de fase $\chi_\alpha = \pi/2$, Número de Strouhal $St = 0,45$ y como parámetro variable se toma la amplitud media de *pitching* α_a .

En la Tabla 1 se presenta una comparación del coeficiente de sustentación máximo C_{Lm} y el coeficiente de tracción promedio. Se puede concluir que existe buena paridad en los resultados obtenidos en el presente trabajo con los obtenidos por (Pedro et al., 2003) y (Guerrero, 2008).

	Pedro et al.		Guerrero		Presente trabajo	
	$\bar{c}t$	C_{Lm}	$\bar{c}t$	C_{Lm}	$\bar{c}t$	C_{Lm}
5°	0.43	8.33	0.42	8.08	0.43	8.21
10°	0.65	7.48	0.66	7.17	0.66	7.24
15°	0.82	6.63	0.84	6.54	0.82	6.39
20°	0.93	5.82	0.94	6.11	1.00	5.51
25°	1.00	5.06	0.96	5.61	1.09	4.99

Tabla 1: Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ y el coeficiente de sustentación máximo C_{Lm} en movimiento *flapping* para un perfil NACA 0012 rígido.

Como caso de verificación del módulo estructural, se plantea un modelo de viga en cantilever que vibra libremente a través de un desplazamiento inicial prefijado. El problema fue resuelto por (Han et al., 1999) mediante diferentes modelos teóricos (Euler-Bernoulli, Shear, Rayleigh and Timoshenko), a través del método de expansión de funciones propias.

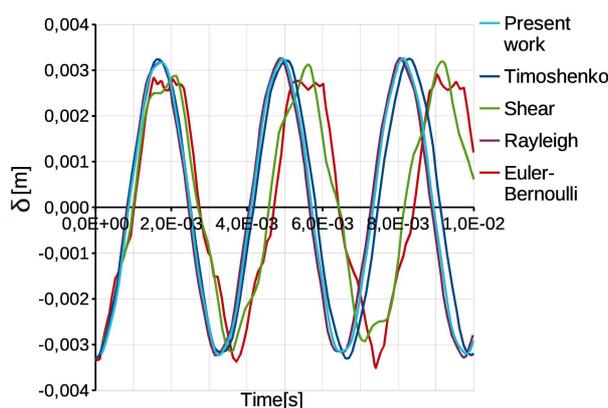


Figura 1: Comparación de los desplazamientos de la puntera de la viga.

Las propiedades de la viga son: longitud $L = 1m$, sección tubular: radio interno $r_i = 0,15m$, radio externo $r_e = 0,16m$, área $A = 0,0097389m^2$, momento de inercia $I = 0,0001171m^4$ y densidad $\rho_s = 7830kg/m^3$. Se utilizan veinte elementos unidimensionales lineales a lo largo de la viga. La función del desplazamiento transversal inicial $w(x, 0)$ es:

$$w(x, 0) = (1,667x^3 - 5x^2)10^{-3} \quad (33)$$

donde x es la coordenada a lo largo de la viga.

El desplazamiento de la puntera de la viga para los diferentes métodos y el presente trabajo se presenta en la Fig. 1, donde se observa una buena paridad en los resultados obtenidos por el código numérico.

3.2. Verificación del código FSI

El problema consiste de una placa elástica fija a un cuerpo rígido de forma cuadrada, el cual está sumergido en un flujo incompresible. La separación del flujo por la abrupta terminación del cuerpo rígido, produce vórtices que inducen oscilaciones de la placa. El dominio computacional, las condiciones de borde y las dimensiones de la geometría, pueden observarse en la Fig. 2a. El problema fue originalmente propuesto por (Wall y Ramm, 1998). Los parámetros del problema son los siguientes: densidad de la estructura $\rho_s = 0,1[Kg/m^3]$, el módulo de Young $E = 2,5e6$, densidad del fluido $\rho_f = 1,18e - 3[Kg/m^3]$, viscosidad dinámica $\mu = 1,82e - 4[Kg/m.s]$ y velocidad de la corriente libre $U = 51,3[m/s]$. El número de Reynolds resultante es $Re = 333$, con la longitud del lado del cuerpo rígido $L_b = 1m$ como la longitud característica.

	$f_{fs}[1/s]$	$err_f[\%]$	$\delta[m]$	$err_a[\%]$
Present Work	3.19	-	0.99	-
Kassiotis	3.17	0.35	1.03	3.20
Vazquez	3.12	1.94	0.99	0.10
Wall	3.07	3.70	1.33	24.80

Tabla 2: Comparaciones para el problema FSI.

El mallado del dominio consta de 24745 elementos y el mallado estructural consta de 40 elementos unidimensionales de igual longitud. La tolerancia impuesta para el problema es $\epsilon_0 = 3^{-6}$ y un promedio de 7 iteraciones por paso de tiempo. La Fig. 2b, muestra las respuestas periódicas

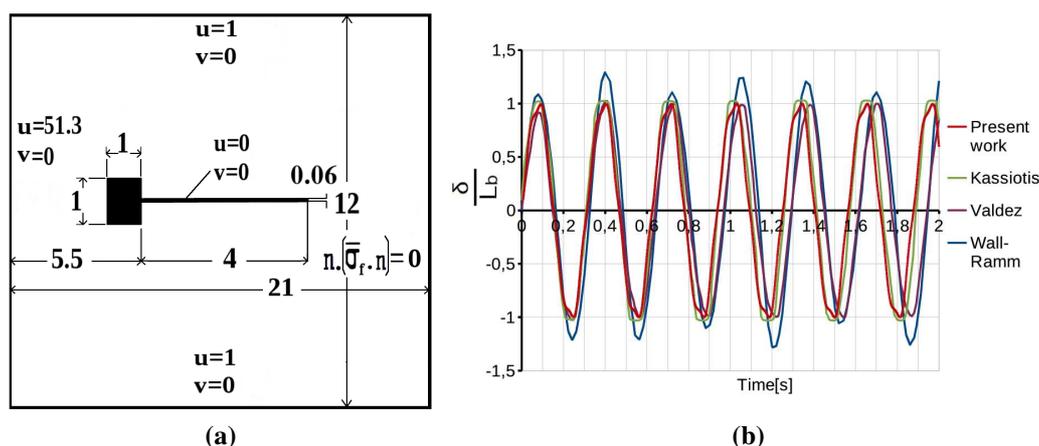


Figura 2: [a] Especificaciones del dominio para el problema FSI. [b] Comparación del desplazamiento de puntera.

obtenidas por diferentes autores (Wall y Ramm, 1998), (Kassiotis et al., 2011), (Vazquez, 2007) en comparación con los resultados obtenidos por el presente trabajo. Cabe aclarar que se asume que la respuesta alcanza el estado periódico, cuando la diferencia entre amplitudes máximas es menor a 0.05. Luego, se observa que existe una buena paridad entre el resultado arrojado por el código y las referencias mencionadas.

Para completar el análisis se presenta una comparación de las frecuencias de la respuesta f_{fs} y el desplazamiento máximo alcanzado por la puntera de la placa δ con sus respectivos errores, en la Tabla 2³.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1. Movimiento vertical *heaving*

La elección de un rango de variación para el número de Strouhal no es de manera aleatoria, si no que en base a estudios anteriores, como el realizado por (Taylor et al., 2003), se determina que en función de la velocidad de crucero, la frecuencia y la amplitud de batimiento de las alas en animales como pájaros, murciélagos e insectos, el mismo se encuentra en el rango $0,19 < St < 0,41$ para el 75 % de dichas especies. Además, demostraron que el rango de Strouhal para la máxima eficiencia propulsora η para aves es estrecho y reducido a $0,2 < St < 0,4$ (Guerrero, 2008). En el trabajo de (Antonelli et al., 2015) se encontró que la máxima eficiencia propulsora η para perfiles NACA simétricos sometidos a movimiento *heaving* y a número de Reynolds $Re = 1100$ se encuentra a un número de Strouhal $St = 0,3$. Partiendo de dicho análisis se procede a estudiar la influencia de la flexibilidad δ^* y el factor de interacción fluido-estructura Σ en dos perfiles simétricos NACA 0012 and NACA 0004. Los parámetros cinemáticos son: frecuencia $f_h = 1Hz$, media amplitud de *heaving* $h_a = 0,15$. Los parámetros variables son $8,707e^{-6} < \delta^* < 8,707e^{-3}$ a través del módulo de Young E y $0,217 < \Sigma < 1,783$ a través de la densidad estructural ρ_s . La tolerancia impuesta para el esquema de relajación de Aitken es $\epsilon_0 = 10^{-6}$.

En las Figs. 3 y 4 se presentan el coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ y la eficiencia propulsora η para un perfil NACA 0012 y NACA 0004 respectivamente. El coeficiente de tracción

³El error para la frecuencia se calcula como $err_f = \frac{f_p - f_r}{f_r}$ donde f_p es la frecuencia del presente trabajo y f_r la frecuencia de la referencia. Para el máximo desplazamiento de la puntera se procede de la misma manera.

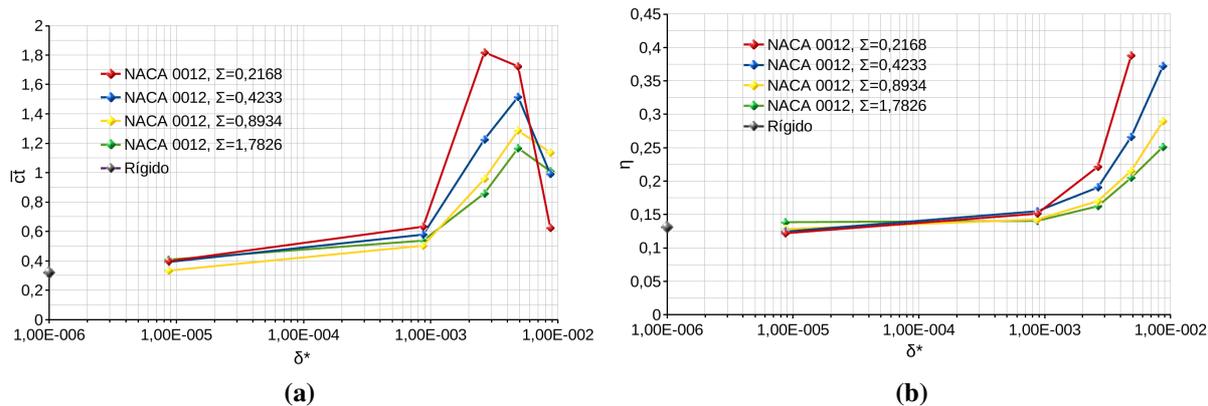


Figura 3: Coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t y eficiencia propulsora η para movimiento *heaving* sobre un perfil NACA 0012.

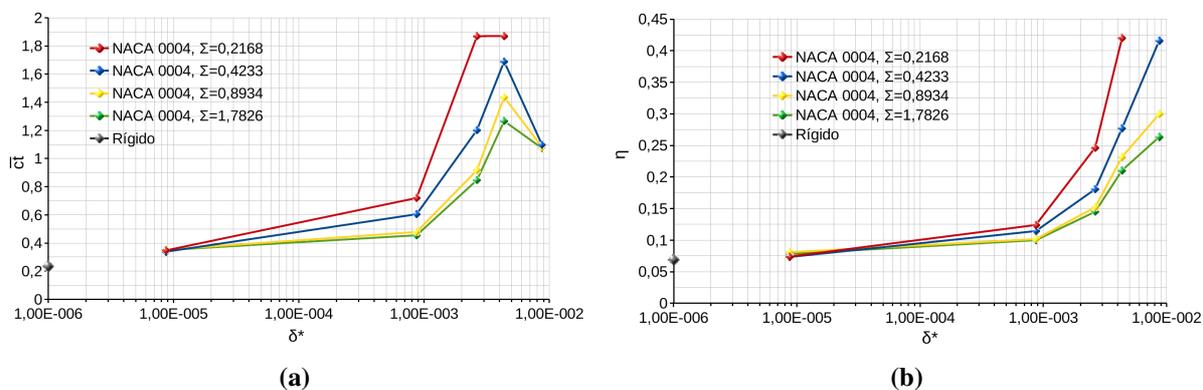


Figura 4: Coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t y eficiencia propulsora η para movimiento *heaving* sobre un perfil NACA 0004.

promedio \bar{c}_t y la eficiencia propulsora η son mayores sobre el perfil NACA 0012 para perfiles rígidos $\delta^* = 0$. La geometría del perfil más grueso permite que los vórtices generados por el borde de ataque tengan una mejor convección y acoplamiento con la estela que los perfiles más delgados.

Al aumentar la flexibilidad, la geometría del perfil se deforma debido a las fuerzas fluido-dinámicas e inerciales. El efecto causado es un aumento en la propulsión promedio \bar{c}_t y en su eficiencia η sobre ambas geometrías. Se observa que se alcanza un máximo de \bar{c}_t entre $1e^{-3} < \delta^* < 6e^{-3}$ y luego decrece para valores de $\delta^* > 6e^{-3}$. El aumento de la eficiencia propulsora η con la flexibilidad luego de dicho valor, se debe a la caída del coeficiente de potencia promedio \bar{c}_p .

Si se comparan ambas geometrías, puede observarse que los máximos valores se alcanzan para el perfil más delgado NACA 0004 al contrario de lo que ocurre con los perfiles rígidos. En cuanto a la influencia de la variable paramétrica Σ sobre el coeficiente \bar{c}_t , se observa que los máximos valores se dan para perfiles que cuentan con mayor masa estructural (valores de Σ más bajos).

Las causas del aumento de tracción promedio \bar{c}_t debido a δ^* y a Σ pueden entenderse un poco mejor mediante la Fig. 5, donde se presentan los perfiles de velocidad de dos casos analizados

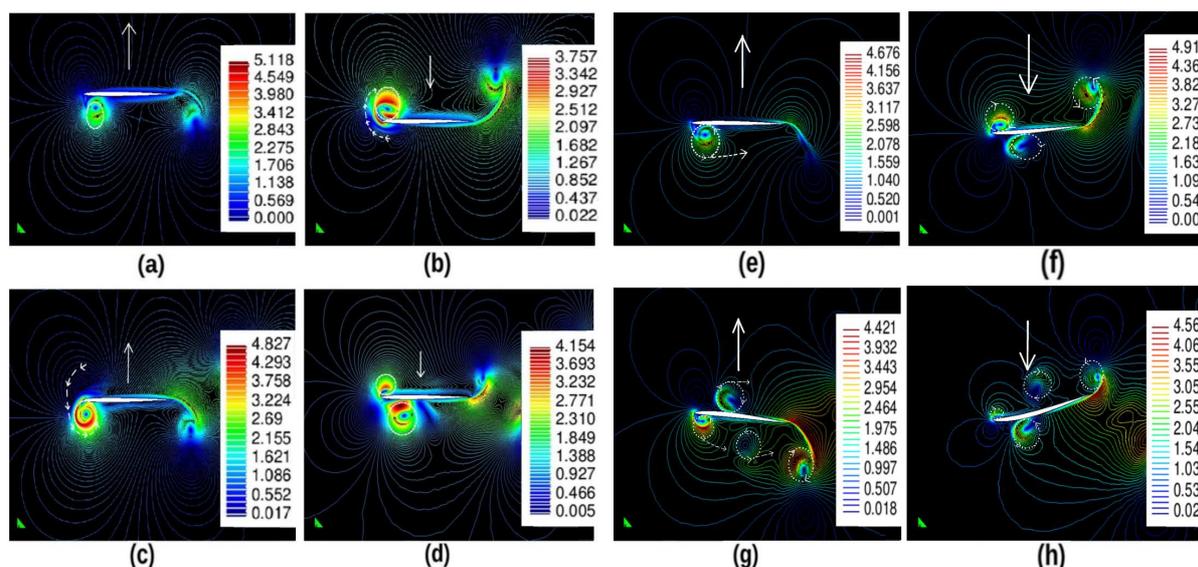


Figura 5: Contorno de velocidad sobre un perfil NACA 0004 en movimiento Heaving. [a], [b], [c], [d] Rígido. [e], [f], [g], [h] Flexible.

sobre el perfil NACA 0004. Los casos [a], [b], [c] y [d] corresponden a un perfil rígido y [e], [f], [g] y [h] a un perfil flexible con $\delta^* = 2,64e^{-3}$ y $\Sigma = 0,26168$. Los tiempos correspondientes a cada figura son (a) y (e) $t = 0,45s$; (b) y (f) $t = 0,86s$; (c) y (g) $t = 1,29s$ y (d) y (h) $t = 1,64s$. Puede observarse que sobre el perfil rígido el vórtice desprendido desde el borde de ataque permanece mayor tiempo adherido al mismo, mientras que el perfil flexible adquiere combadura producto de la deformación, y dicho vórtice se convecta hacia la estela de manera más rápida y regular. Además, la intensidad de los vórtices del borde de fuga se ve incrementada debido a que la velocidad del borde de fuga del perfil flexible, aumenta por la velocidad de deformación.

4.2. Movimiento vertical y de cabeceo combinado *flapping*

El siguiente análisis responde a una cinemática sinusoidal de movimiento vertical y de cabeceo combinado *flapping*. Los parámetros de movimiento son $St = 0,3$ ($h_a = 0,15$), $Re = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 10^\circ$, $\chi_\alpha = \pi/2$ y la tolerancia de relajación de Aitken impuesta es $\epsilon_0 = 10^{-6}$. Se observa en las Figs. 6a y 6b que en ambos perfiles, el coeficiente $\bar{c}t$ se ha incrementado respecto a los valores obtenidos en movimiento *heaving*. El máximo $\bar{c}t$ se encuentra entre valores de flexibilidad $1e^{-3} < \delta^* < 1e^{-2}$. En este caso, el ángulo de ataque variable permite una mejor convección de los vórtices desprendidos desde el borde de ataque y su acople con la estela (Antonelli et al., 2015). Se observa que la flexibilidad ayuda a mejorar la propulsión, pero no en la magnitud que lo hace en el movimiento *heaving*. Además, la diferencia encontrada entre los valores del movimiento *heaving* y *flapping* para ciertos valores de flexibilidad no es de gran magnitud, lo que puede conducir a la posibilidad de evaluar el reemplazo de mecanismos de rotación, por superficies flexibles en la construcción de MAVs.

Se observa que los mayores valores obtenidos para el coeficiente de tracción y la eficiencia propulsora se dan para el perfil NACA 0004. El fundamento de dicho resultado se debe a que la intensidad de los vórtices generados en el borde de ataque y en el borde de fuga, es mayor sobre perfiles con bordes más agudos. Mediante la ayuda de la flexibilidad y el ángulo de ataque variable, dichos vórtices pueden convectarse de manera más rápida y regular hacia la estela. Otro aspecto a destacar, es que al aumentar la densidad estructural del perfil (disminuir el valor

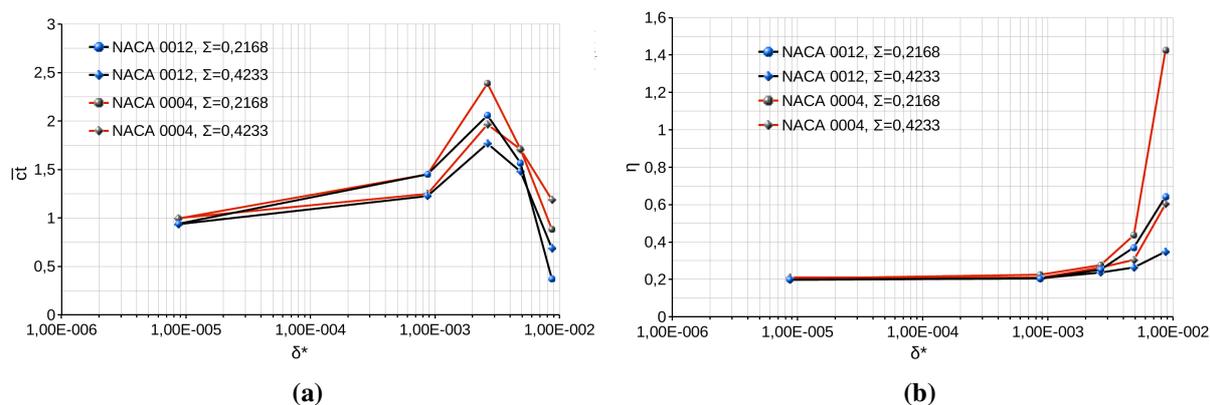


Figura 6: Coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t y eficiencia propulsora η para movimiento *flapping* sobre perfiles NACA 0004 y NACA 0012.

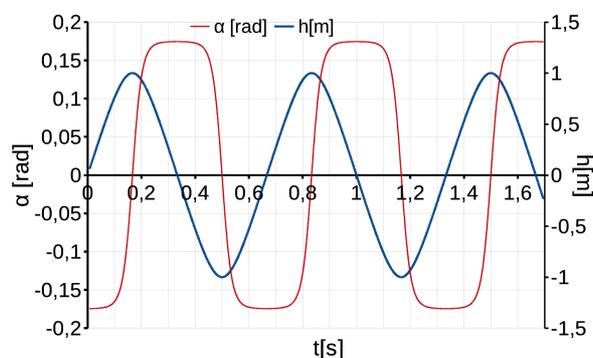


Figura 7: Cinemática alternativa.

de Σ), se aumentan \bar{c}_t y η sobre ambos perfiles.

Como variante del presente análisis, se puede utilizar una cinemática que responde a una onda tipo diente de sierra para el desplazamiento $h(t)$ y una onda de tipo escalón para el ángulo de cabeceo $\alpha(t)$, Fig. 7. Dicha cinemática es la utilizada por un MAV denominado Robofly (Dickinson et al., 2004). Las ecuaciones correspondientes a dichas curvas se escriben a continuación y se las denominará como cinemática alternativa:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{h_a}{\sin^{-1}(0,8)} \sin^{-1}(0,8 \sin(2\pi f_h t)) \\ \alpha(t) &= \frac{\alpha_a}{\tanh^{-1}(3)} \tanh^{-1}(3 \sin(2\pi f_\alpha t + \chi_\alpha)) \end{aligned} \quad (34)$$

El coeficiente de tracción promedio y la eficiencia propulsora para una cinemática alternativa se presentan en la Fig. 8. Los máximos valores de \bar{c}_t se encuentran entre $1e^{-4} < \delta^* < 1e^{-3}$ y se incrementan respecto a los obtenidos en la cinemática sinusoidal para ambos perfiles. En la cinemática alternativa, el ángulo de ataque se mantiene en su posición de máxima amplitud, durante mayor tiempo debido a su patrón trapezoidal, esto implica que al momento de girar el perfil, los vórtices generados en el borde de ataque (LEV) y de fuga (TEV) sean más intensos. Dichos vórtices proporcionan mayor velocidad a la estela, lo que implica mayor propulsión. En cuanto a la relación de espesor de los perfiles, se observa que el perfil más delgado cuenta con mayor coeficiente de tracción generado. La eficiencia propulsora η presenta los máximos

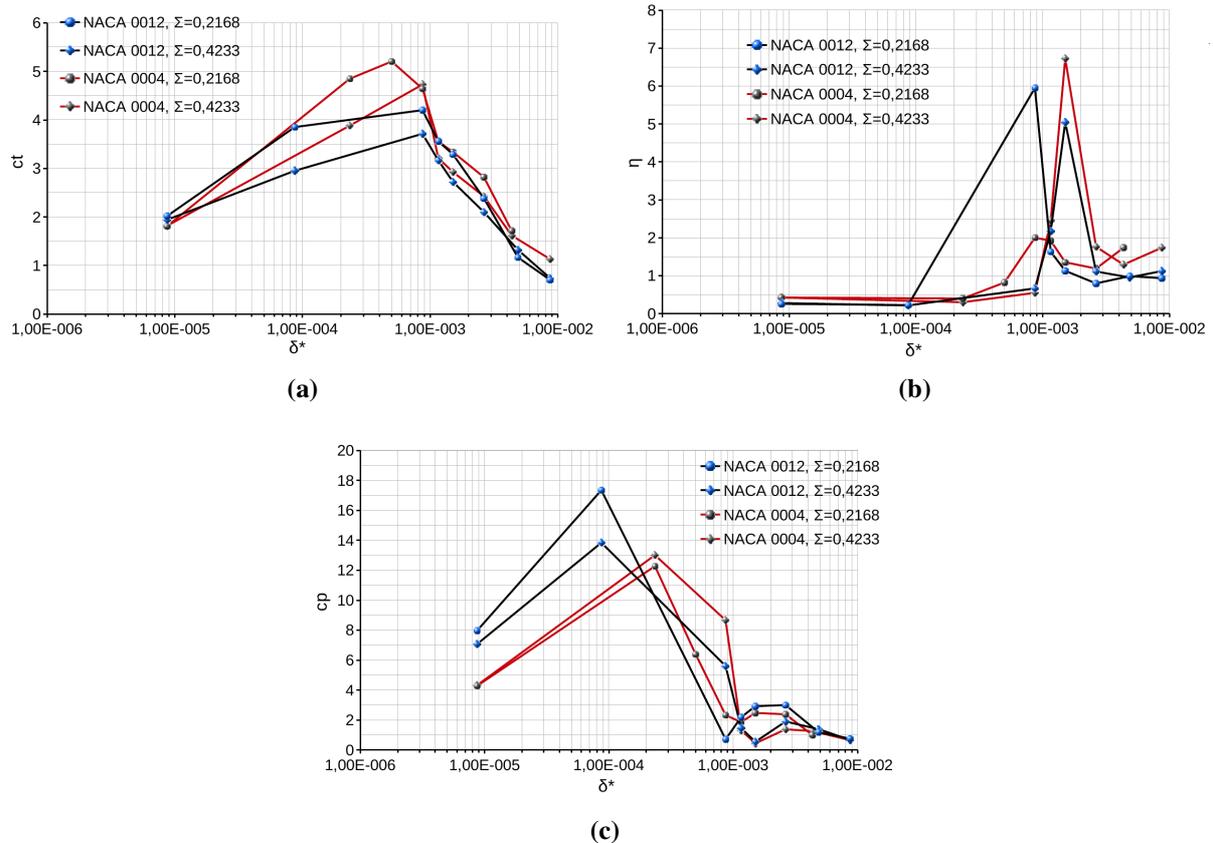


Figura 8: Coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t y eficiencia propulsora η para movimiento *flapping* con una cinemática alternativa sobre perfiles NACA 0004 y NACA 0012.

valores entre $5e^{-3} < \delta^* < 1e^{-2}$, y la curva obtenida se debe a que la eficiencia es dependiente del coeficiente de potencia introducida \bar{c}_p , que se grafica en la Fig. 8c.

5. CONCLUSIONES

En el estudio de movimiento *heaving*, se simulan numéricamente perfiles rígidos y flexibles donde se obtienen los coeficientes de tracción medio y la eficiencia propulsora que son determinantes en el vuelo de crucero de aves, insectos y MAV. En perfiles rígidos, se encontró que los perfiles aerodinámicos de mayor espesor tienen mayor propulsión que los perfiles aerodinámicos más delgados. Luego, se realizaron estudios relacionados con la influencia de la flexibilidad y el factor de intensidad de interacción FSI en los coeficientes de tracción y la eficiencia. De las comparaciones con los datos obtenidos para perfiles rígidos, se concluye que las mejoras son factibles para algunos valores de flexibilidad. Como ayuda para comprender mejor los resultados de la simulación, se presentaron contornos de velocidad que permiten la comparación entre un perfil rígido y uno flexible al mismo tiempo de simulación. Se observa la topología del flujo, especialmente la formación de vórtices desprendidos desde el borde de ataque y de fuga, y como influyen sobre las características propulsoras.

También se simulan casos correspondientes al movimiento *flapping*. Se realizó la comparación entre dos cinemáticas diferentes para dos perfiles NACA simétricos flexibles. En ambos casos, se estudió la influencia de la flexibilidad y el factor de intensidad de interacción FSI, donde se encontró que existe una mejora sobre la propulsión para ciertos rangos de δ^* y la

disminución de Σ también produce un aumento en $\bar{c}t$. En la cinemática alternativa se obtienen mejores resultados que en la cinemática sinusoidal, debido a que los vórtices generados en el borde de ataque y de fuga son más intensos y proporcionan mayor velocidad sobre la estela. Para perfiles flexibles se encuentra que la disminución del espesor geométrico mejora las características propulsoras, al contrario de lo que ocurre con perfiles rígidos. Entre las cinemáticas de movimiento sinusoidal *flapping* y *heaving* para perfiles flexibles, no existe gran diferencia entre los máximos valores de propulsión obtenidos para ciertos rangos de flexibilidad. Por lo tanto, existe la posibilidad de utilizar la flexibilidad, para reemplazar el hardware de movimiento de rotación en aplicaciones MAV y así disminuir el peso constructivo.

Se utilizó un software de elementos finitos desarrollado por los autores, que es capaz de resolver problemas de perfiles rígidos y flexibles sometidos a flujo inestacionario. Para ello, se implementa un algoritmo de resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes 2D de interacción (FSI) fuerte.

Los trabajos a futuro se centran en el vuelo sin corriente libre *hovering* para perfiles flexibles, con cinemáticas, parámetros dinámicos y de vuelo similares a especies determinadas de insectos. También se llevarán a cabo estudios tridimensionales de alas flexibles en base a los resultados 2D obtenidos.

REFERENCIAS

- Antonelli D., Sacco C., y Tamagno J. Steady and unsteady analysis of aerodynamics wing sections at ultra-low reynolds numbers ($re < 10000$). *1st Pan-American Congress on Computational Mechanics - PANACM 2015*, 2015.
- Aono H., Chimakurthi S., Cesnik C., Liu H., y Shyy W. Computational modeling of spanwise effects on flapping wing aerodynamics. *AIAA*, 1270, 2009.
- Canann S.A., Tristano J.R., y Staten M.L. An approach to combined laplacian and optimization-based smoothing for triangular, quadrilateral, and quad-dominant meshes. *International Meshing Roundtable*, 1998.
- Cebral J. y Lohner R. Conservative load projection and tracking for fluid-structure problems. *AIAA Journal*, 35(4):687–692, 1997.
- Chandar D.D.J. y Damodaran M. Computational fluid-structure interaction of a flapping wing in free flight using overlapping grids. *AIAA 2009-3676*, 2009.
- Codina R. Pressure stability in fractional step element methods for incompressible flows. *Computational Physics*, 170, 2000.
- Combes S.A. y Daniel T.L. Flexural stiffness in insect wings. effect of wins venation and stiffness distribution on passive bending. *American entomologist*, 2005.
- Cook R., Malkus D.S., Witt R.J., y Plesha M.E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Hardcover, 2001.
- Degroote J. *Development of Algorithms for the Partitioned Simulation of Strongly Coupled Fluid-Structure Interaction Problems*. Tesis de Doctorado, Ghent University, Ghent, Belgium, 2010.
- Dickinson M.H., Lehmann F., y Sane S.P. Wing rotation and the aerodynamic basis of insect flight. *Science*, 284:1954–60, 2004.
- Donea J. y Huerta A. *Finite Element Methods for Flow Problems*. John Wiley and Sons, 2003.
- Guerrero J. *Numerical simulation of the unsteady aerodynamics of flapping flight*. Tesis de Doctorado, University of Genova, Genova, Italy, 2008.
- Han S.M., Benaroya H., y Wei T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and vibration*, 1999.

- Heathcote S. y Gursul I. Flexible flapping airfoil propulsion at low reynolds numbers. *AIAA Paper 2005-1405-CP*, 2005.
- Kang C., Aono H., Cesnik C.E.S., y Shyy W. Effects of flexibility on the aerodynamic performance of flapping wings. *6th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference*, 2011.
- Kang C. y Shyy W. Effects of flexibility on the aerodynamics of a hovering flexible airfoil at reynolds number of 100 to 1000. *AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, 2012.
- Kassiotis C., Ibrahimbegovic A., Niekamp R., y Matthies H. Nonlinear fluid-structure interaction problem. part i: implicit partitioned algorithm, nonlinear stability proof and validation examples. *HAL archives-ouvertes.fr*, 2011.
- Lohner R. *Applied CFD Techniques*. John Wiley and Sons, 2001.
- Maza M., Flores F., y Preidikman S. Interaccion fluido-estructura inestacionaria y no-lineal, con modelos de flujo potencial y estructuras de vigas. *Asociacion Argentina de Mecanica Computacional*, XXXI:771–795, 2012.
- Naderi A., Mojtahedpoor M., y Beiki A. Numerical investigation of non-stationary parameters on effective phenomena of a pitching airfoil at low reynolds number. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 9(2):643–651, 2016.
- Olivier M. *A Fluid-Structure Interaction Partitioned Algorithm Applied to Flexible Flapping Wing Propulsion*. Tesis de Doctorado, Université Laval, Québec, Canada, 2010.
- Pedro G., Suleman A., y Djilali N. A numerical study of the propulsive efficiency of a flapping hydrofoil. *International Journal for numerical methods in fluids*, 42:493–526, 2003.
- Principe J. y Codina R. On the stabilization parameter in the subgrid scale approximation of scalar convection-diffusion-reaction equations on distorted meshes. *International Center for Numerical Methods in Engineering*, 2009.
- Taylor G., Nudds R., y Thomas A. Flying and swimming animals cruise at a strouhal number tuned for high power efficiency. *Letters to Nature*, 425:707–711, 2003.
- Vazquez J.G.V. *Nonlinear Analysis of Orthotropic Membrane and Shell Structures Including Fluid-Structure Interaction*. Tesis de Doctorado, Universitat politecnica de catalunya, Barcelona, Spain, 2007.
- Wall W.A. y Ramm E. Fluid-structure interaction based upon a stabilized (ale) finite element method. *IV World Congress on Computational Mechanics, Barcelona*, 1998.
- Wright J.R. y Cooper J.E. *Introduction to aircraft aeroelasticity and loads*. John Wiley and Sons, 2007.