

AERODINÁMICA DEL VUELO A NÚMEROS DE REYNOLDS ULTRA-BAJOS (RE<10000)

Dino P. Antonelli^{a,c}, Carlos G. Sacco^b, José P. Tamagno^a

^a*Universidad Nacional de Córdoba. Av. Vélez Sarfield 1611, (5000), Córdoba, Argentina.*

^b*Instituto Universitario Aeronáutico. Av. Fuerza Aérea S/n, (5000), Córdoba, Argentina.*

^c*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas- CONICET, Argentina.*

Palabras Clave: CFD, aerodinámica, Reynolds ultra-bajos, perfil.

Resumen. El régimen de vuelo para los MAV (por Micro Air Vehicles), de por sí plantea numerosos desafíos para el análisis y el diseño aerodinámico. Además, existen escasos experimentos computacionales para superficies aerodinámicas que operan con números de Reynolds ultra bajos ($Re < 10000$). Con este contexto, se puede afirmar que las investigaciones y desarrollos para esta escala todavía están en su infancia. En este trabajo se presenta un análisis numérico vía CFD, del campo de movimiento alrededor de perfiles aerodinámicos con el objetivo de obtener datos sobre el comportamiento de los mismos a este régimen. Para dicho estudio se ha utilizado un software para resolver numéricamente las ecuaciones de Navier Stokes para flujo incompresible laminar. El algoritmo empleado se basa en el método de elementos finitos bidimensional con esquemas de pasos fraccionados semi-implícito. En primer lugar, con el propósito de verificar el código en este tipo de problemas, se realizaron algunas aplicaciones de flujo estacionario sobre un cuerpo ya estudiado como el cilindro, y el coeficiente de fricción de una placa plana sometida a flujo laminar. Posteriormente se hicieron simulaciones sobre varios perfiles NACA serie 4, donde se estudiaron efectos de espesor, combadura, diferentes formas de borde de ataque y consideraciones para posibles combinaciones de geometrías con el fin de mejorar las prestaciones en determinadas aplicaciones.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta la solución de flujos en régimen de ultra-bajo Reynolds, más precisamente de las ecuaciones de Navier Stokes bidimensionales bajo régimen de flujo incompresible laminar.

La solución de las ecuaciones de gobierno se hace recurriendo al método de elementos finitos, en donde las ecuaciones diferenciales del problema se transforman en ecuaciones algebraicas utilizando el método de residuos ponderados (Zienkiewicz y Taylor 2002 ; Cook et al. 2001 ; Reddy J. N., 1993). Luego de la discretización por elementos finitos, las expresiones integrales de las ecuaciones diferenciales, dan lugar a la aparición de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales cuya dimensión está definida por la cantidad de incógnitas que definen el dominio de análisis.

El algoritmo de integración de las ecuaciones empleado en este trabajo es un esquema de pasos fraccionados del tipo Euler forward, o explícito de primer orden de precisión en el tiempo; que consiste en agregar a las ecuaciones de Navier Stokes en su forma débil una velocidad intermedia de tal manera de separar el gradiente de presión, y calcular dicha velocidad que luego será corregida por el nuevo cálculo de la presión en una nueva ecuación.

El modelo si bien nos simplifica las ecuaciones de movimiento del fluido, nos agrega una complicación en la estabilidad cuando deseamos resolverlas por medio de un método numérico-discreto. Dichos problemas se generan en el carácter que toma la ecuación de continuidad, al pasar de su naturaleza hiperbólica a elíptica siendo independiente del tiempo y desacoplando el término de la presión de las velocidades. Para salvar estas complicaciones se agrega una ecuación de Poisson para la presión, y se reemplaza la ecuación de continuidad por ecuaciones derivadas de esta. Pero sin embargo, en el problema discreto la ecuación para la presión se vuelve inestable al computarla con las velocidades discretas desacopladas de la misma, al igual que el término convectivo. Para ello se implementan métodos de estabilización basado en la teoría de subescalas (Hughes, 2004) .

El código computacional permite imponer las condiciones de contorno sobre las variables habituales como velocidad y presión en las incógnitas nodales.

Para el pre y pos-proceso se utiliza el software GID© donde se realiza la extracción de resultados que se manifiestan a continuación. El contenido del trabajo consta de las siguientes partes: en la sección 2 se presenta el sistema de ecuaciones a resolver, Navier Stokes incompresible junto a las condiciones de contorno, en la sección 3 tratamos la discretización del problema por el método de elementos finitos junto al método de resolución implementado, (método de paso fraccionados), en la sección 4 se desarrolla el algoritmo de estabilización utilizado, en la sección 5 verificamos el código con dos casos teóricos presentados en la bibliografía, en la sección 6 presentamos y analizamos resultados obtenidos para flujo a ultra-bajo Reynolds para diferentes formas de perfiles aerodinámicos; en la sección 7 se exponen las conclusiones y se encuadra este trabajo en un marco más extenso de investigación.

2. SISTEMA DE ECUACIONES DE GOBIERNO DEL PROBLEMA CONTINUO

Al imponer la simplificación de flujo incompresible, la densidad se mantiene constante en el tiempo y en el espacio, por lo tanto las ecuaciones de continuidad y de movimiento se desacoplan de la ecuación de la energía, siempre y cuando se mantenga flujo isotérmico. De allí que podemos plantear el problema continuo sobre un dominio Ω en \mathbb{R}^2 , de contorno Γ y en un intervalo de análisis $[0, T]$ en el tiempo.

La ecuación de continuidad puede ser escrita como:

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \text{ y } t \in [0, T] \quad (1)$$

Esta ecuación toma el carácter de no evolutiva en el tiempo de tal manera que se convierte en una restricción a la ecuación de momento, la cual puede expresarse como:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \chi \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_e \quad \text{en } \Omega \text{ y } t \in [0, T] \quad (2)$$

Donde $\chi = \frac{\mu}{\rho}$ es la viscosidad cinemática del flujo, \mathbf{u} es el campo de velocidades del fluido, p es la presión estática, y \mathbf{f}_e son las fuerzas externas aplicadas.

El problema de Navier Stokes consiste en hallar una presión p y una velocidad \mathbf{u} tal que cumplan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}_0 \text{ y } p = \bar{p}_0 && \text{en } t = t_0 \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} && \text{en } \Gamma_{D\chi} \\ p &= \bar{p} \text{ ; } [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} && \text{en } \Gamma_{N\chi} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= \bar{u}_n \text{ ; } [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{g}_1 = \bar{\mathbf{t}}_1 && \text{en } \Gamma_{M\chi} \end{aligned} \quad (3)$$

donde la barra indica que son conocidas y $[\boldsymbol{\sigma}]$ es el tensor de tensiones del fluido. El contorno Γ puede dividirse en tres partes: $\Gamma_{D\chi}$ donde se especifican las condiciones de borde de la variable principal \mathbf{u} (Dirichlet), $\Gamma_{N\chi}$ donde se especifican las condiciones de borde de las variables secundarias (Neumann), y $\Gamma_{M\chi}$ donde se especifican las condiciones de borde mixtas de velocidad normal y tensiones tangenciales. El versor \mathbf{n} , es el versor normal al contorno, y el versor \mathbf{g}_1 , genera el espacio tangente a $\Gamma_{M\chi}$.

La forma débil del problema continuo consiste en encontrar \mathbf{u} y p que pertenecen a espacios funcionales V y Q respectivamente, y con \mathbf{v} y \mathbf{q} funciones de prueba que pertenecen a los espacios de funciones de test V_{st} y Q_{st} respectivamente tal que:

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \right\rangle = \frac{-1}{\rho} \langle p, \nabla \mathbf{v} \rangle + \chi \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{f}_e, \mathbf{v} \rangle \quad (4)$$

$$\langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{q} \rangle = 0 \quad (5)$$

donde en las ecuaciones (4) y (5), la expresión $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ significa:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega \quad (6)$$

3. DISCRETIZACIÓN Y ESQUEMA DE PASOS FRACCIONADOS

3.1. Discretización temporal monolítica

En la discretización temporal se hace uso de un esquema de diferencias finitas, regla del trapecio, para establecer el cambio de las magnitudes a medida que evolucionan en el tiempo. Consideremos una partición uniforme del intervalo de tiempo $[0, T]$ de tamaño δt , y sea f^n la aproximación de una función dependiente del tiempo f , en el nivel de tiempo $t^n = n \delta t$. Dado un parámetro $\theta \in [0, 1]$, denotamos:

$$f^{n+\theta} = \theta f^{n+1} + (1-\theta) f^n \quad (7)$$

La integración temporal del problema planteado por las ecuaciones (4) y (5), se puede resolver mediante una regla trapezoidal generalizada. Dado \mathbf{u}^n conocido, hallar \mathbf{u}^{n+1} y p^{n+1} en t^{n+1} , de tal manera que nos queda:

$$\left\langle \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) + \mathbf{u}^{n+\theta} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\theta}, \mathbf{v} \right\rangle = \frac{-1}{\rho} \langle p^{n+1}, \nabla \mathbf{v} \rangle + \chi \langle \nabla \mathbf{u}^{n+\theta}, \nabla \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{f}^{n+\theta}, \mathbf{v} \rangle \quad (8)$$

$$\langle \nabla \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{q} \rangle = 0 \quad (9)$$

El término de fuerzas $\mathbf{f}^{n+\theta}$ se entiende como la media temporal de la fuerza en el intervalo $[t^n, t^{n+1}]$ pese a que usemos el superíndice $(n+\theta)$ para caracterizarlo. El valor de la presión calculado, lo hemos identificado como la presión en $t^{n+\theta}$, aunque esto es irrelevante para la aproximación de la velocidad. Los valores de interés de θ son $\theta=1/2$, que corresponde al esquema de segundo orden de Crank- Nicolson, $\theta=1$, al método de Euler hacia atrás (implícito), y $\theta=0$, correspondiente al método de Euler hacia adelante (explícito).

3.2. Discretización por elementos finitos

La solución de las ecuaciones de Navier Stokes incompresible se realiza por el método de elementos finitos, que permite tratar de manera diferenciada la discretización espacial, y la temporal. En el caso de la discretización espacial los campos de velocidad y presión son interpolados dentro de cada elemento a partir de los valores nodales empleando funciones de forma predefinidas.

Sea una partición de elementos finitos Z_h perteneciente al dominio Ω y de diámetro h , a partir del cual construimos los espacios de elementos finitos Q_h y $V_{h,0}$. El problema discreto se obtiene básicamente aproximando p y \mathbf{u} . Si identificamos las funciones pertenecientes al espacio de elementos finitos con el subíndice h , suponemos que \mathbf{u}_h^n y p_h^n se construyen con interpolación estándar a partir de los valores nodales (Codina, 2004). A partir de las ecuaciones (8) y (9) podemos escribir:

$$\frac{1}{\delta t} [\mathbf{M}] (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) + [\mathbf{K}_c(\mathbf{u}^{n+\theta})] \cdot \mathbf{u}^{n+\theta} + [\mathbf{K}_\chi] \mathbf{u}^{n+\theta} = -\frac{1}{\rho} [\mathbf{G}] p^{n+1} + \mathbf{f}^{n+\theta} \quad (10)$$

$$[\mathbf{D}] \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (11)$$

siendo $\mathbf{u}^{n+\theta}$ el vector de velocidades en los nodos de la malla en el paso de tiempo $n+\theta$. Las matrices y vectores globales en las ecuaciones (10)-(11), se obtienen a partir del ensamble de las siguientes matrices elementales:

$$[\mathbf{M}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] d\Omega_e \quad \text{Matriz de masa elemental (o matriz de Gram).}$$

$$[\mathbf{K}_c(\mathbf{u}^{n+\theta})] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{u}_e^{n+\theta}] [\mathbf{B}] d\Omega_e \quad \text{Matriz de convección del elemento.}$$

$$[\mathbf{K}_\chi] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] d\Omega_e \quad \text{Matriz de difusión del elemento.}$$

$$[G] = \int_{\Omega_e} [N]^{fis} [N_p] \Omega_e \quad \text{Matriz asociada al } \nabla p \text{ del elemento.}$$

$$[D] = [G]^T \quad \text{Matriz asociada al } \nabla u \text{ del elemento.}$$

donde $[N]$ es la matriz de funciones de forma para interpolar la velocidad, $[u^{n+\theta}]$ es la matriz de valores de la velocidad nodal en el tiempo $t^{n+\theta}$, $[C]$ es la matriz constitutiva correspondiente a la viscosidad, $[B]$ es la matriz de derivadas de funciones de interpolación con respecto a las coordenadas físicas, $[N]^{fis}$ es un re-ordenamiento de la matriz $[B]$:

$$[N]^{fis} = \left[\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \dots + \frac{\partial N_{Nn}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Nn}}{\partial y} \right] \quad (12)$$

con N_{Nn} igual al número de nodos del elemento, y $[N]_p$ la matriz de funciones de interpolación para la presión.

Cabe aclarar que en este trabajo, todas las simulaciones se hicieron con la discretización del dominio en elementos triangulares lineales de tensión constante.

3.3. Método de pasos fraccionados

Empleando un esquema de pasos fraccionados con integración temporal explícita, y bajo este procedimiento la estabilidad de la presión depende del tamaño del paso de tiempo δt . Para evitar incurrir en problemas relacionados y sobre todo para esquemas de primer orden, es recomendable tomar un δt cercano al paso de tiempo crítico como en Codina (2001).

La aplicación del método de pasos fraccionados a las ecuaciones discretas (10)-(11), implica considerar una nueva variable auxiliar con características de velocidad, denominada velocidad intermedia o momento fraccionado \bar{u} , que nos permite fraccionar el problema planteado. Luego de hacer algunas aproximaciones nos queda de la siguiente manera (Codina, 2004):

$$\frac{1}{\delta t} [M] (\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n) + [K_c(\bar{u}^{n+\theta})] \cdot \bar{u}^{n+\theta} + [K_x] \bar{u}^{n+\theta} - \frac{\gamma}{\rho} [G] p^{n+1} = 0 \quad (13)$$

$$\delta t [L] \bar{u}^{n+1} (p^{n+1} - \gamma p^n) = -\rho [D] \bar{u}^{n+1} \quad (14)$$

$$\frac{1}{\delta t} [M] (\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n) - \frac{1}{\rho} [G] (p^{n+1} - \gamma p^n) = 0 \quad (15)$$

siendo $\bar{u}^{n+\theta}$ el vector de velocidades y, $[L]$ es una matriz laplaciana que resulta de la aproximación estándar:

$$[L] \approx [D M^{-1} G] \quad (16)$$

Esta aproximación sólo es posible cuando se usan interpolaciones continuas de presión.

Se emplea esta formulación, dado que permite trabajar con las mismas funciones de aproximación para interpolar la presión y velocidad a nivel elemental, lo cual resulta ventajoso al momento de la implementación computacional, además, el método explícito propuesto (Euler hacia adelante $\theta=0$ y $\gamma=0$), con respecto a los métodos implícitos convencionales de integración, reside en la eficiencia computacional de integración asociada a la solución de sistemas lineales de menor tamaño, esto disminuye la necesidad de emplear algoritmos iterativos en la solución del sistema de ecuaciones. Lo único que se resuelve de manera

implícita, es la ecuación de Poisson (operador de Laplace) a través de un esquema de Gradientes Conjugados (ec. 18).

Por último podemos expresar las ecuaciones (13), (14) y (15) de manera más compacta en forma variacional:

$$\frac{1}{\delta t} \langle \bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h \rangle = \frac{1}{\delta t} \langle \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h \rangle - \langle \mathbf{u}_h^n \nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h \rangle - \chi \langle \nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{v}_h \rangle - \langle \mathbf{f}^n, \mathbf{v}_h \rangle \quad (17)$$

$$\langle \nabla p_h^{n+1}, \nabla q_h \rangle = \frac{\rho}{\delta t} [\langle \bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \nabla q_h \rangle - \langle \nabla \mathbf{u}_h^n, q_h \rangle] \quad (18)$$

$$\langle \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h \rangle = \langle \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h \rangle - \frac{\delta t}{\rho} \langle \nabla p_h^{n+1}, q_h \rangle \quad (19)$$

4. ALGORITMO DE ESTABILIZACIÓN

4.1. Estabilización del término convectivo

El método que se utiliza en este trabajo es conocido como OSS (Orthogonal Subscale Stabilization), e.g. ver Bell (1989), Codina (2000) y Soto (2001). La expresión resultante para el término de estabilización en forma variacional es:

$$STB_u = \langle -\tau_1 (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \pi_h^n), \mathbf{u}_h^n \nabla \mathbf{v}_h \rangle \quad (20)$$

y se añade a la ecuación de momento (17). Como se puede observar el término de estabilización está evaluado en el instante t_n de forma que el sistema sigue siendo explícito. En la ecuación (13) se introduce π_h que es la proyección de los términos convectivos y su expresión variacional está dada por:

$$\langle \pi_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h \rangle = \langle \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h \rangle \quad (21)$$

donde $\tilde{\mathbf{v}}_h$ pertenece a \bar{V}_h que es un espacio de elementos finitos extendido.

4.2. Estabilización del término de incompresibilidad

Para lograr un correcto comportamiento del algoritmo, se debe añadir un término de estabilización en la ecuación de incompresibilidad. En este trabajo se utiliza al igual que para los términos convectivos, una estabilización OSS (Codina 2000 ; Soto 2001) para la presión, por lo tanto a la ecuación (18) se le debe añadir el término:

$$STB_p = \langle -\tau_2 (\nabla p_h^{n+1} - \xi_h^n), \nabla q_h \rangle \quad (22)$$

donde ξ_h es la proyección del gradiente de presiones y se determina de la siguiente manera:

$$\langle \xi_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h \rangle = \langle \nabla p_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h \rangle \quad (23)$$

donde $\tilde{\mathbf{v}}_h$ pertenece a \bar{V}_h espacio de elementos finitos extendido.

4.3. Esquema estabilizado

Una vez añadido los términos de estabilización correspondientes a las ecuaciones de momento y de incompresibilidad el esquema resultante se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\delta t} \langle \bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h \rangle = \frac{1}{\delta t} \langle \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h \rangle - \langle \mathbf{u}_h^n \nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h \rangle - \chi \langle \nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{v}_h \rangle - \langle \mathbf{f}^n, \mathbf{v}_h \rangle - \langle \tau_1 (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \pi_h^n), \mathbf{u}_h^n \nabla \mathbf{v}_h \rangle \quad (24)$$

$$\langle \nabla p_h^{n+1}, \nabla q_h \rangle = \frac{\rho}{\delta t + \tau_2} [\langle \bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \nabla q_h \rangle - \langle \nabla \mathbf{u}_h^n, q_h \rangle] + \frac{\tau_2}{\delta t + \tau_2} \langle \nabla \xi_h^n, \nabla q_h \rangle \quad (25)$$

$$\langle \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h \rangle = \langle \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h \rangle - \frac{\delta t}{\rho} \langle \nabla p_h^{n+1}, q_h \rangle \quad (26)$$

$$\langle \pi_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h \rangle = \langle \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h \rangle \quad (27)$$

$$\langle \xi_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h \rangle = \langle \nabla p_h^n, \tilde{\mathbf{v}}_h \rangle \quad (28)$$

En el esquema resultante, los sistemas de ecuaciones resultantes de (24), (26), (27) y (28) se resuelven en forma explícita condensando las matrices de masas. El sistema de ecuaciones dado por la Ec. (25) se resuelve mediante gradientes conjugados con pre-condicionador diagonal.

5. VERIFICACIÓN DEL CÓDIGO

5.1. Flujo viscoso sobre un cilindro

Un flujo muy estudiado sobre cuerpos a régimen de ultra-bajo Reynolds con presencia de desprendimiento laminar de capa límite y formación de vórtices, es el flujo sobre un cilindro. Es un caso de gran importancia en la evaluación del comportamiento de algoritmos de resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes, ya que se cuenta con numerosos ensayos experimentales y contrastes teóricos que sirven para poner a punto un código computacional.

En la bibliografía, se manifiesta que un desprendimiento regular y oscilatorio de vórtices ocurre en un rango de números de Reynolds basados en el diámetro del cilindro, más precisamente para $60 < R_e < 5000$ aproximadamente (Schlichting, 1969), donde dicho desprendimiento y estela pueden ser considerado laminar.

En este trabajo exhibimos el flujo sobre un cilindro a número de Reynolds igual a 100, basado en el diámetro.

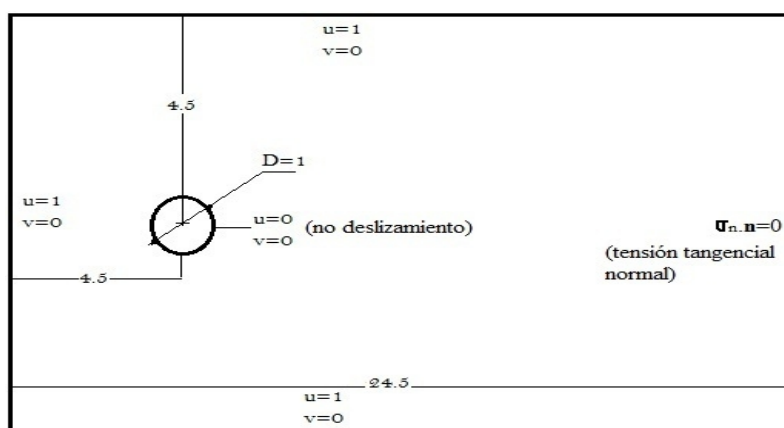


Figura 1: Condiciones de contorno para el flujo sobre un cilindro.

Se adoptaron las siguientes condiciones de contorno y parámetros de flujo para la simulación (ver figura 1).

$$\rho = 1 \left[\frac{Kg}{m^3} \right]; \quad \mu = 0,01 \left[\frac{Kg}{m.s} \right]; \quad u = 1 \left[\frac{m}{s} \right]; \quad D = 1 [m]$$

donde ρ es la densidad, μ es la viscosidad dinámica, u es la componente de velocidad en la dirección de corriente libre, y D es el diámetro del cilindro.

Resultados experimentales muestran que la frecuencia de oscilación del desprendimiento de vórtices depende únicamente del número de Reynolds. A continuación vemos el resultado oscilatorio de los coeficientes de sustentación y resistencia, solamente basados en fuerzas de presión (ver figuras 2 y 3).

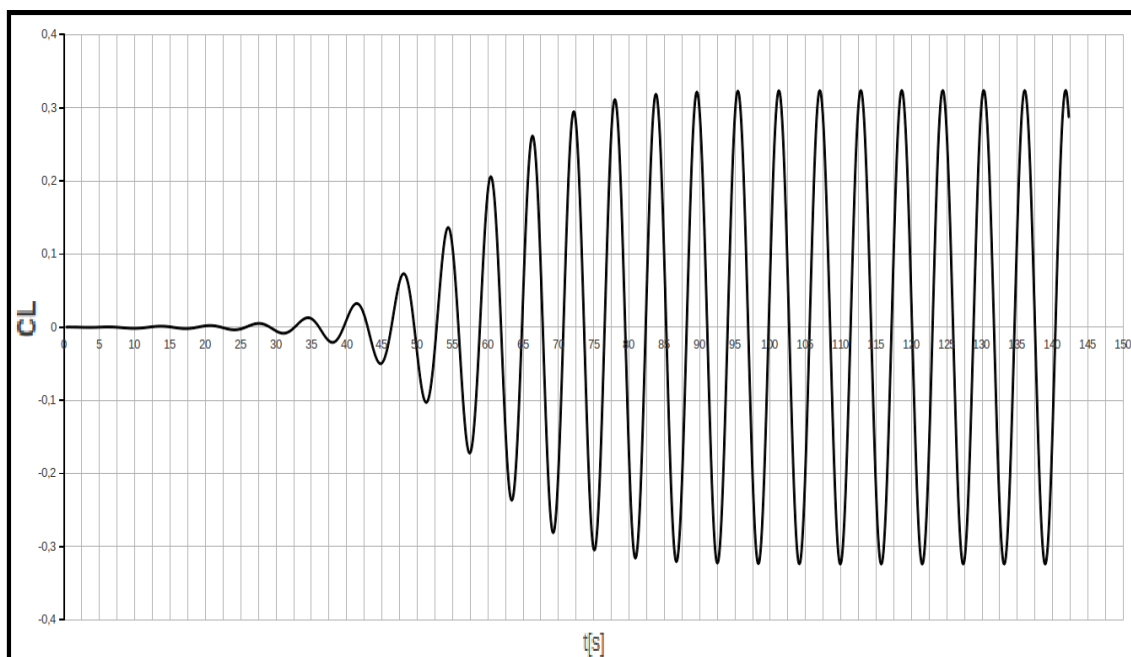


Figura 2: Coeficiente de sustentación en el tiempo sobre un cilindro a Reynolds 100.

Según Schlichting (1969), el período de oscilación del coeficiente de sustentación para un $Re=100$ es de $T = 5,98$ [s]. El resultado arrojado por el código es de $T = 5,90$ [s] teniendo así una diferencia aceptable de 1,3%. Como se sabe de la bibliografía el período de la fuerza de resistencia es la mitad de la de sustentación.

Además, en resultados experimentales (Schlichting, 1969) el coeficiente de resistencia para un cilindro a $Re=100$ es $C_D = 1,3$, y el resultado tomando el promedio una vez establecido el régimen oscilatorio estacionario arrojado por el programa, contemplando resistencia de fricción y de presión es $C_D = 1,3022$.

5.2. Flujo viscoso sobre una placa plana

El principal interés de este ítem, es saber que contamos con una aproximación razonable a un caso de resolución teórica del coeficiente de fricción del fluido. Tiene como objetivo verificar el buen funcionamiento del código en la determinación de las tensiones tangenciales generadas por el fluido sobre un cuerpo. Como solución teórica apelamos a los resultados obtenidos por Blasius donde establece que el coeficiente de fricción es (Panton, 1984):

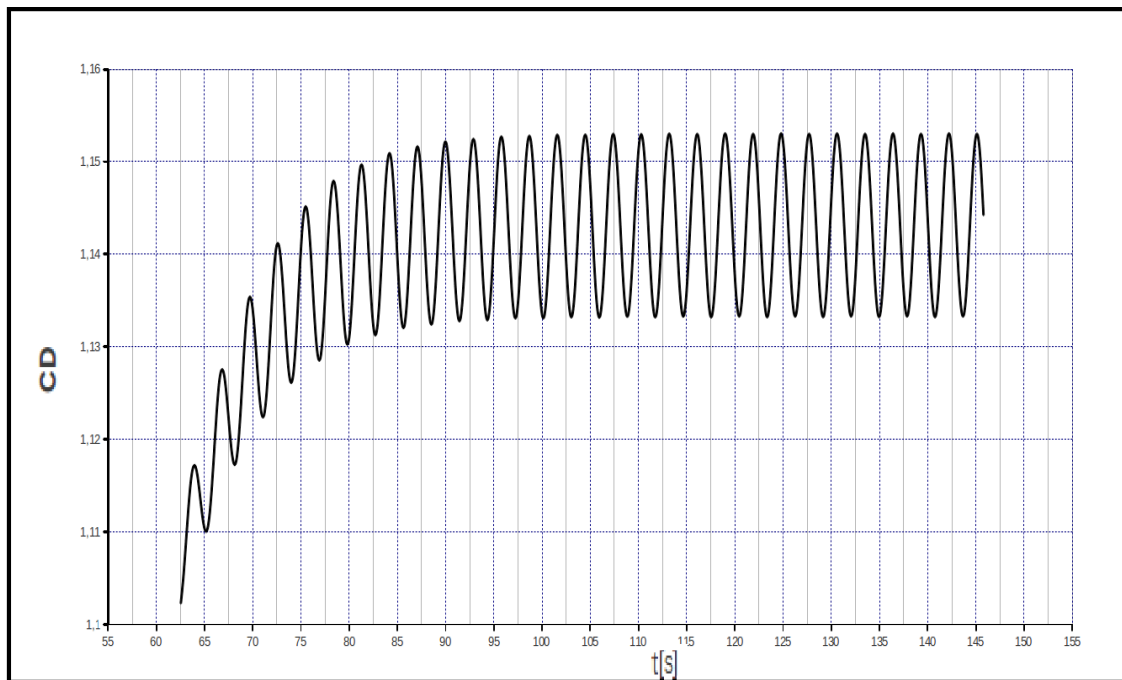


Figura 3: Coeficiente de resistencia(sólo de presión) en el tiempo sobre un cilindro a Reynolds 100.

$$C_f = \frac{0,664}{R_{ex}^{1/2}} \tag{29}$$

donde R_{ex} es el número de Reynolds variable con la longitud de la placa.

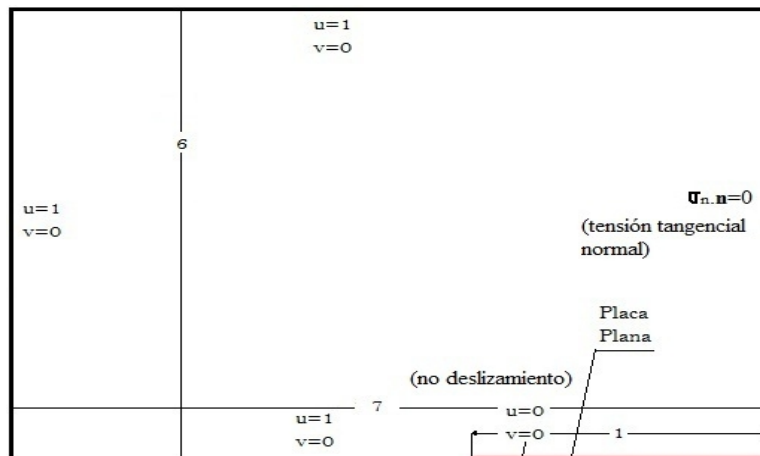


Figura 4: Condiciones de contorno para la simulación de la placa plana.

Para el modelo numérico se simula una placa plana sin espesor sólo con el fin de estudiar las tensiones tangenciales generadas por el fluido. El dominio de simulación y las condiciones de contorno se pueden ver en la (figura 4), y como conclusión se observó una paridad aceptable en el coeficiente de fricción entre el resultado teórico y numérico (ver figura 5).

5.3. Comparación de la distribución de presiones sobre perfiles

Otra verificación interesante del código, es comparar ejemplos propios de aplicación como

es la distribución de presiones sobre un perfil aerodinámico. En este caso tomamos como casos de prueba la distribución de presiones sobre perfiles NACA 0002 y 0008 a Reynolds 2000 y 6000, en contraste con los resultados obtenidos por Kunz (2003).

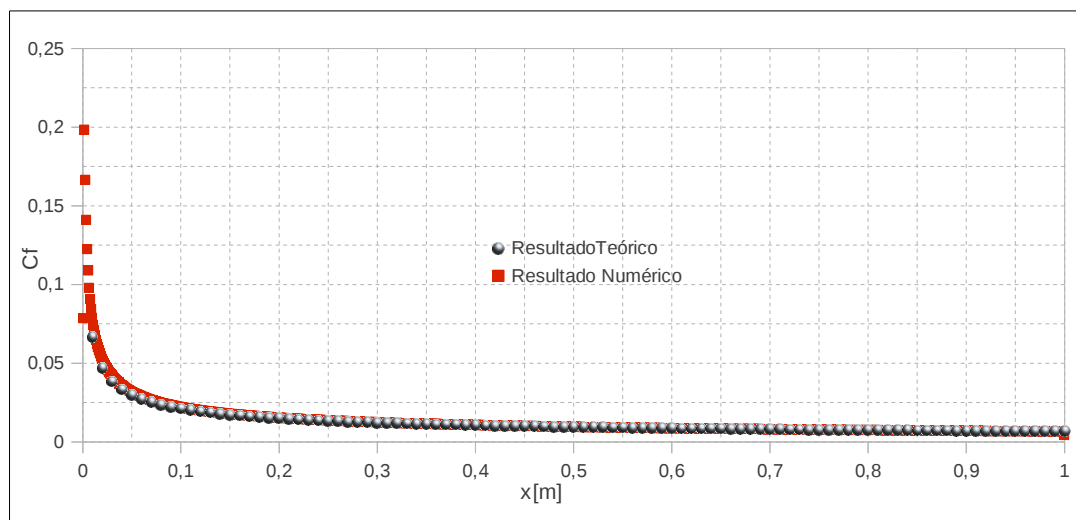


Figura 5: Coeficiente de fricción a lo largo de la placa.

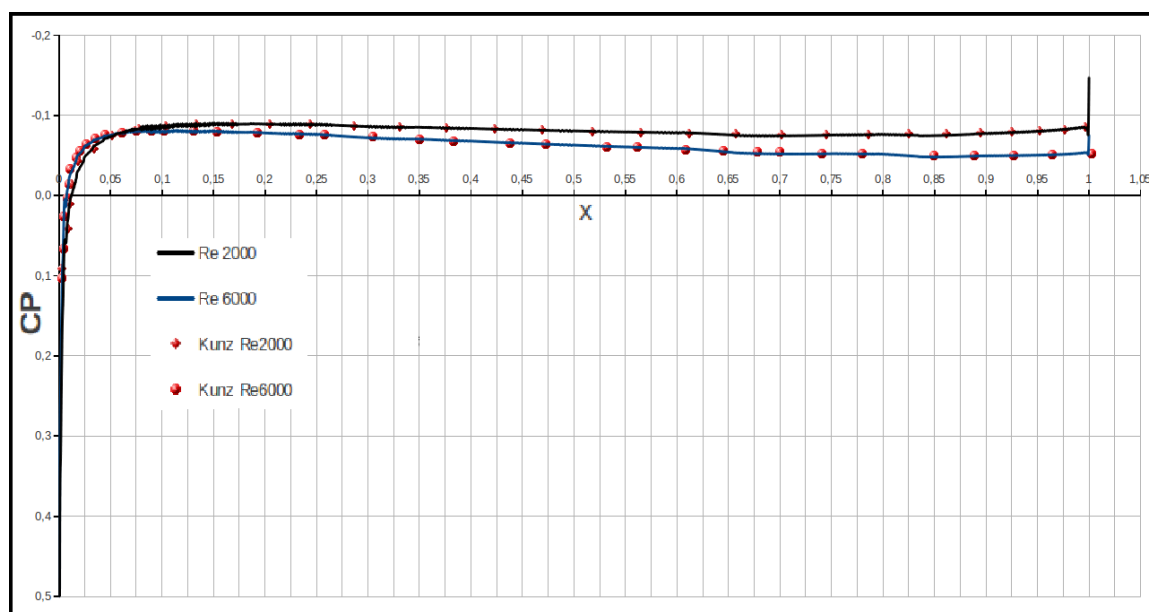


Figura 6: Distribución de presión sobre perfil NACA 0002 a Reynolds 2000 y 6000 y los resultados obtenidos por Kunz (2003).

Observamos que existe una buena correlación entre los resultados del presente trabajo y los obtenidos por dicho autor (ver figuras 6 y 7).

6. RESULTADOS

6.1. Nociones sobre el flujo a ultra-bajo Reynolds

Si realizamos un análisis dimensional de las ecuaciones de cantidad de movimiento,

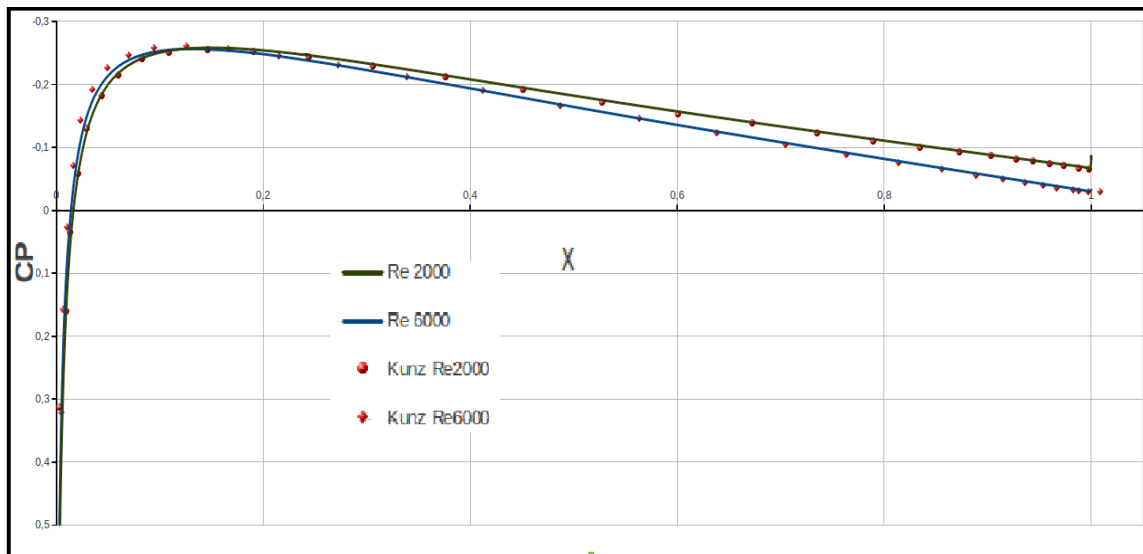


Figura 7: Distribución de presión sobre perfil NACA 0008 a Reynolds 2000 y 6000 y los resultados obtenidos por Kunz (2003).

tomamos L como longitud característica de un cuerpo sumergido en la corriente libre y δ como el espesor de capa límite, llegamos a la relación de proporcionalidad siguiente (Panton, 1984):

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{Re^{1/2}} \tag{30}$$

donde Re es el número de Reynolds. Esto nos indica, que a menores números de Reynolds los efectos de convección del flujo quedan sin efecto ante los efectos viscosos, tornando el flujo totalmente difusivo y de carácter laminar, hipótesis tomada en este trabajo.

Ahora por definición, el espesor de capa límite δ_{99} es la distancia sobre la superficie a la cual se alcanza el 99% de la velocidad de corriente libre, y sobre una placa plana, Blasius desarrolló que era válida la siguiente relación (Schlichting, 1969):

$$\frac{\delta_{99}}{x} = \frac{5}{Re_x^{1/2}} \tag{31}$$

donde x es la longitud de la placa y Re_x el número de Reynolds basado en dicha longitud. Para reafirmar lo antes dicho, podemos hacer un análisis y determinar el espesor para diferentes Re_x con una longitud de placa unitaria.

Re_x	δ_{99}
10000	0,05
1000	0,158113
100	0,5

Tabla 1: Espesor de capa límite en una placa plana a diferentes números de Reynolds.

El considerable aumento de espesor de la zona viscosa tiene casi el 5% de la longitud de la placa a N° de Reynolds 10.000 y el 16% a 1000, esto nos hace replantear el concepto referente a capa límite delgada respecto de las dimensiones del cuerpo, a una zona de importante espesor, donde los efectos viscosos predominan en el flujo. Haremos referencia a la capa límite

a partir de ahora, como flujo cercano al cuerpo.

Es conveniente realizar esta distinción, ya que las dimensiones alcanzadas pueden afectar más allá de lo esperado el campo de flujo libre, sobre el cuerpo, la posición de desprendimiento y la presión. Estos efectos causan un gran aumento de resistencia, pero no de sustentación, afectan la separación del flujo y son cruciales a la hora de lograr una geometría efectiva para una determinada aplicación.

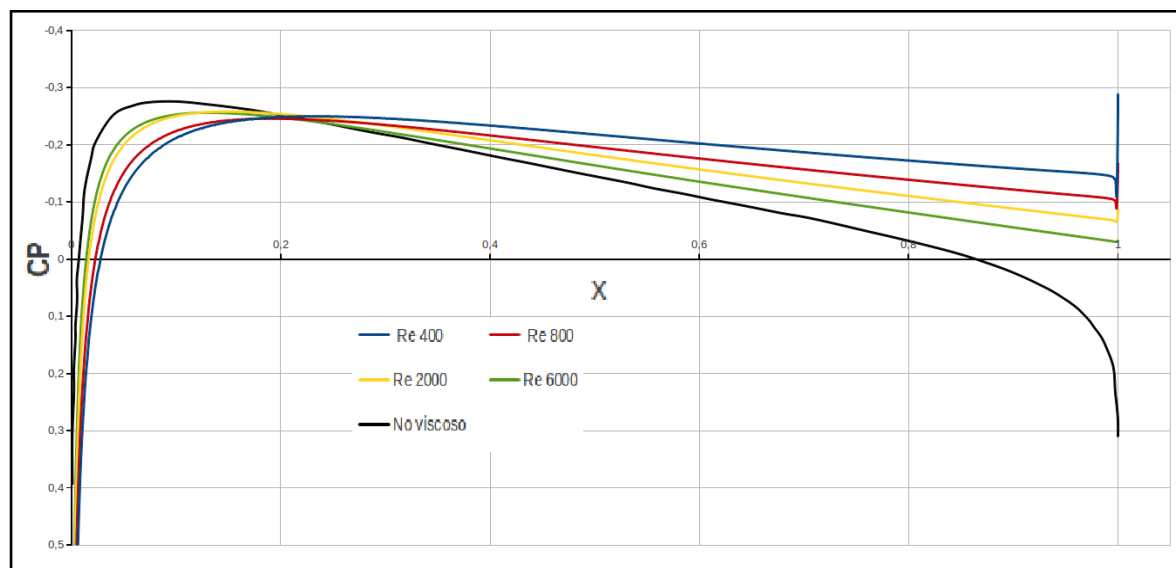


Figura 8: Distribución de presión sobre perfil NACA 0008 a Reynolds 400, 800, 2000 y 6000.

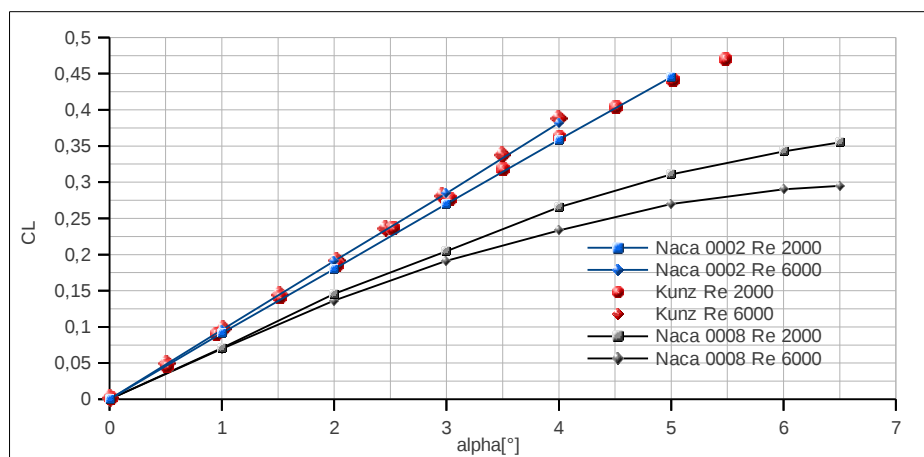


Figura 9: $C_L - \alpha$ NACA 0002 y 0008 a Reynolds 2000 y 6000 y resultados obtenidos por Kunz (2003).

Presentamos distribuciones de presión sobre un perfil NACA 0008 a ángulo de ataque de cero grado, en régimen no viscoso y a diferentes números de Reynolds (ver figura 8).

Las diferencias con el flujo no viscoso saltan a la vista, a menor número de Reynolds el espesor del flujo cercano al cuerpo se torna más grueso impidiendo la recuperación de la presión, pero siempre con flujo adherido a la superficie. Se puede ver que los picos de succión de borde de ataque se suavizan bastante retrasando, esto retrasa la pérdida y los gradientes de presión adversa, además de reducción de la eficiencia aerodinámica en todos los casos debido al decaimiento de la relación L/D . Para el perfil NACA 0002 podemos observar la

comparación de los resultados con los obtenidos por Kunz (2003) (ver figura 9).

Otro ejemplo a destacar, es el análisis de la resistencia y sustentación a varios regímenes de vuelo, como es el caso de un perfil delgado combado 4404 a Reynolds 400, 800 y 6000, en el que observamos la gran diferencia entre las polares de resistencia. Esto se debe a lo que se hacía referencia anteriormente sobre los efectos viscosos en la recuperación de la presión (ver figuras 10 y 11).

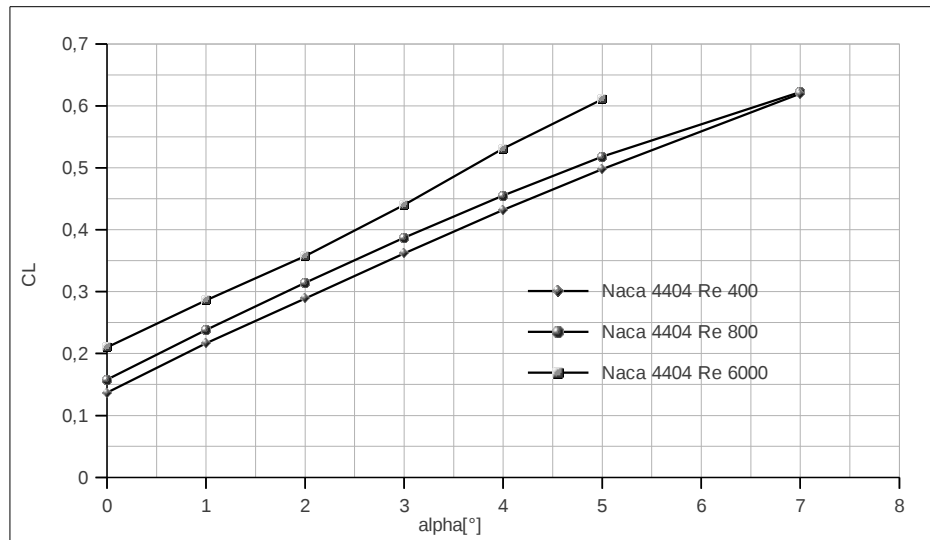


Figura 10: $C_L - \alpha$ de perfil NACA 4404 a Reynolds 400, 800 y 6000.

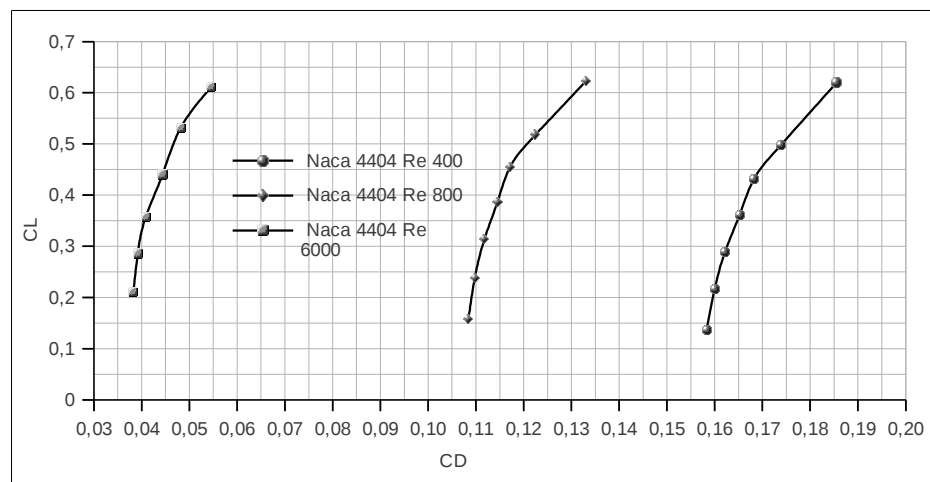


Figura 11: $C_L - C_D$ de perfil NACA 4404 a Reynolds 400, 800 y 6000.

6.2. Separación del flujo laminar

La posición del desprendimiento del flujo comienza desde el borde de fuga en el extradós, y avanza sobre el mismo hacia el borde de ataque a medida que se aumenta el ángulo de incidencia del perfil. Es altamente dependiente de la geometría y el número de Reynolds y lo determinamos con exactitud mediante la inspección de las tensiones de corte sobre la superficie. En dicho punto el gradiente de velocidad se anula, por ende el módulo del tensor de tensiones también.

Una vez calculadas las velocidades sobre el campo de movimiento, inspeccionamos los elementos de la superficie del cuerpo y obtenemos el tensor de tensiones viscosas (ec. 32).

$$\sigma_{ij} = \chi \frac{dv_i}{dx_j} \quad (32)$$

donde χ es la viscosidad cinemática. Luego determinamos las fuerzas de superficie en las direcciones normal y tangencial al cuerpo sobre cada elemento, del siguiente modo:

$$R_j = n_i \sigma_{ij} \quad (33)$$

donde n_i son los versores normal y tangencial a la superficie del cuerpo.

Y por último el módulo del tensor es:

$$\sigma_0 = n_j R_j \quad (34)$$

Finalmente, como criterio de separación tomamos:

$$\sigma_0 = 0 \quad (35)$$

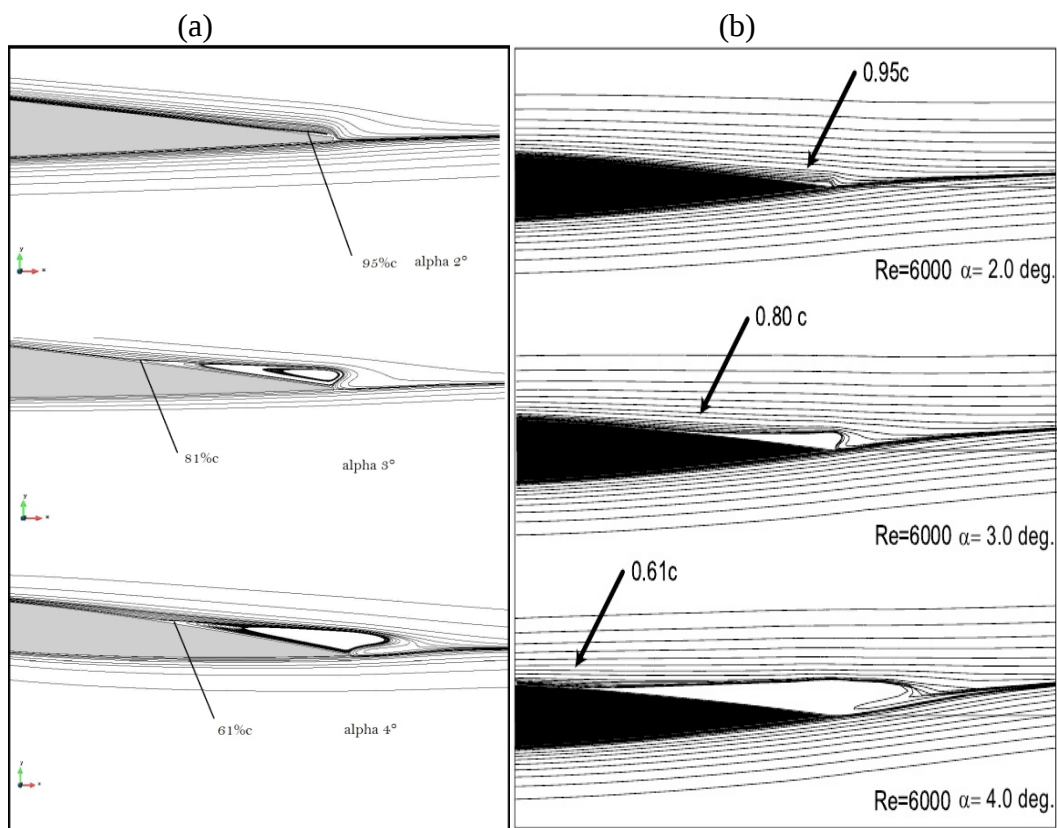


Figura 12: Líneas de corriente y punto de desprendimiento para un perfil NACA 0008 a Reynolds 6000. (a) Resultados del presente trabajo. (b) Resultados obtenidos por Kunz (2003).

De manera esquemática se observan en base a líneas de corriente las posiciones del desprendimiento y formación de burbujas sobre un perfil NACA 0008 a Reynolds 6000 (ver figura 12).

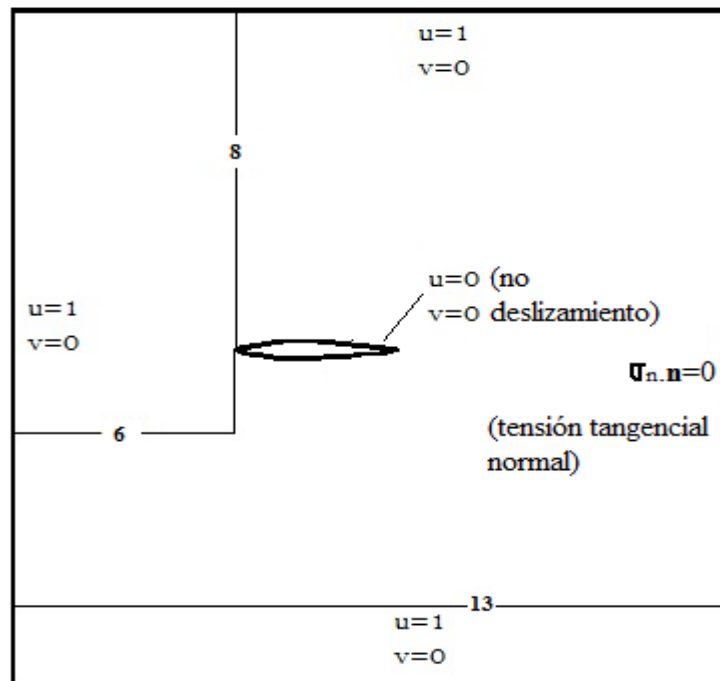


Figura 13: Dominio y condiciones de contorno utilizada en perfil NACA 0008.

El dominio para el análisis y las condiciones de contorno utilizadas se pueden ver en la (figura 13). El mallado utilizado en los tres casos tiene las mismas características (ver figuras 14 y 15), por ejemplo, para el ángulo de incidencia de 2° se simuló sobre un dominio de 13 [m] en x por 16 [m] en y , siendo la longitud de la cuerda del perfil de 1 [m]. La cantidad de elementos es de 109.202 con 55.307 nodos, empleando 1.011 elementos sobre la superficie del cuerpo.

En detalle podemos observar la malla de elementos y las líneas de corriente, en la posición de desprendimiento en el perfil NACA 0008 a 4 grados y a Reynolds 6000 (ver figura 16).

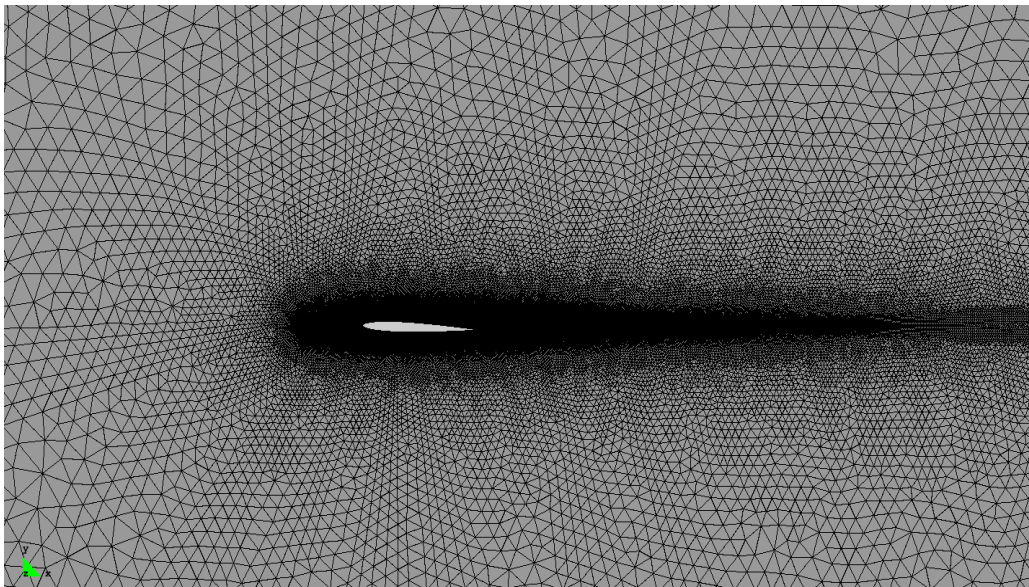


Figura 14: Mallado utilizado en perfil NACA 0008.

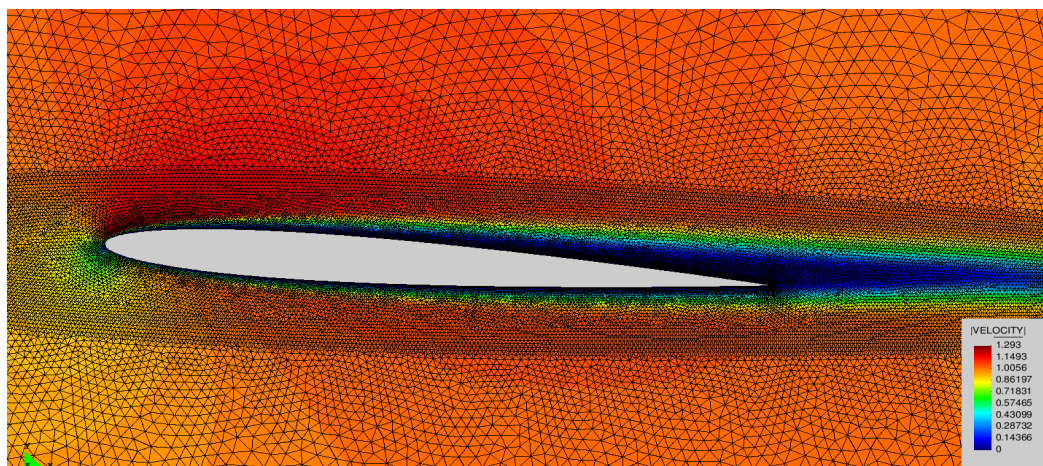


Figura 15: Mallado y distribución de velocidades. Perfil NACA 0008 a 4° y Reynolds 6000.

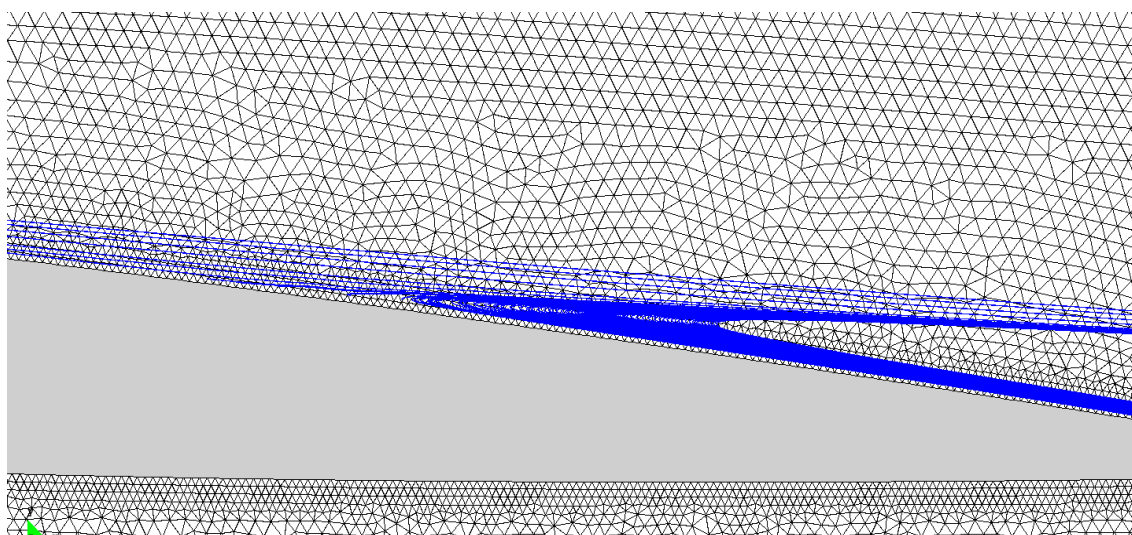


Figura 16: Líneas de corriente sobre la posición de desprendimiento. Perfil NACA 0008 $\alpha=4^\circ$ y $R_e=6000$.

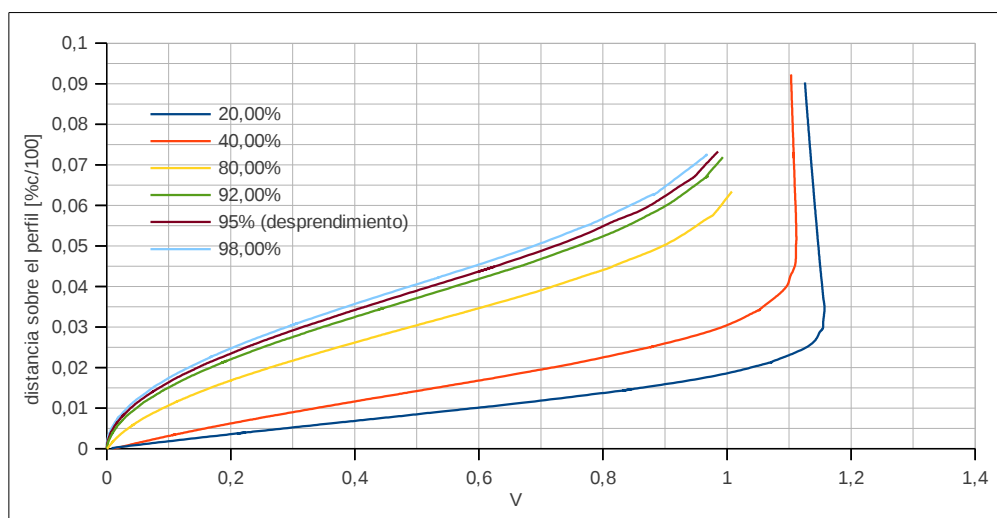


Figura 17: Perfiles de velocidad sobre la superficie de un perfil NACA 0008 a Reynolds 6000 y $\alpha=2^\circ$.

Una noción sobre el comportamiento de la evolución del flujo en la zona cercana al cuerpo sobre el extradós, es expresada a través del gráfico de algunos perfiles de velocidad a lo largo de la cuerda, y donde claramente observamos como la velocidad puede cambiar su sentido en zonas de flujo desprendido, además de la extensión alcanzada en el flujo por la presencia del cuerpo (ver figuras 17 y 18).

6.3. Influencia del espesor

Los efectos del espesor de perfiles sobre el vuelo son estudiados con perfiles NACA simétricos, para aislar el comportamiento propiamente dicho y liberarlos de otros efectos. Se analizan perfiles NACA serie 4, más precisamente (0002, 0006 y 0008) a Reynolds 2000 y 6000.

Es interesante destacar, que los principales cambios se dan en la resistencia (ver figura 19), tanto al variar el espesor, como el número de Reynolds. Es lógico que a menores Reynolds la resistencia lleve un aumento, esto se debe a la menor capacidad de recuperación de la presión a medida que este disminuye, y se acentúa más aún en perfiles gruesos. Pero es de consideración la magnitud con que varía de uno a otro, casi el doble de resistencia de $R_e=2000$ a $R_e=6000$.

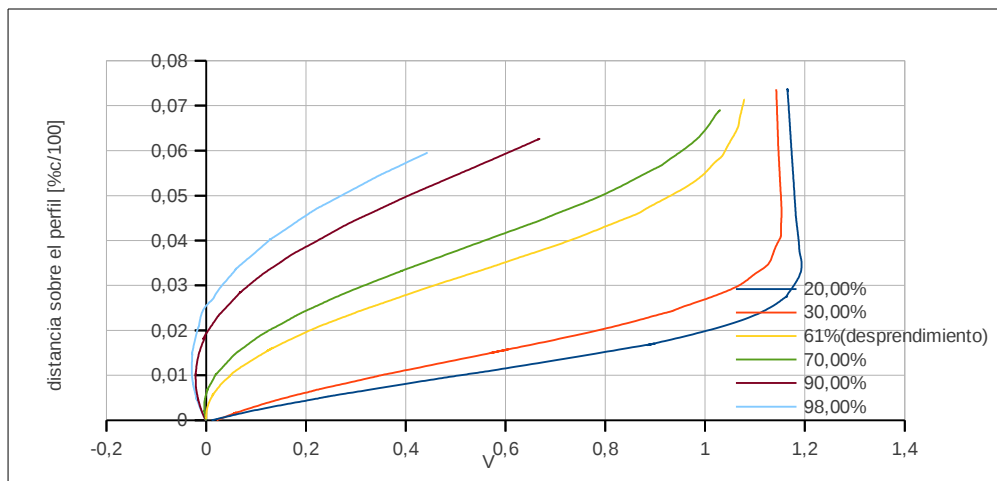


Figura 18: Perfiles de velocidad sobre la superficie de un perfil NACA 0008 a Reynolds 6000 y $\alpha=4^\circ$.

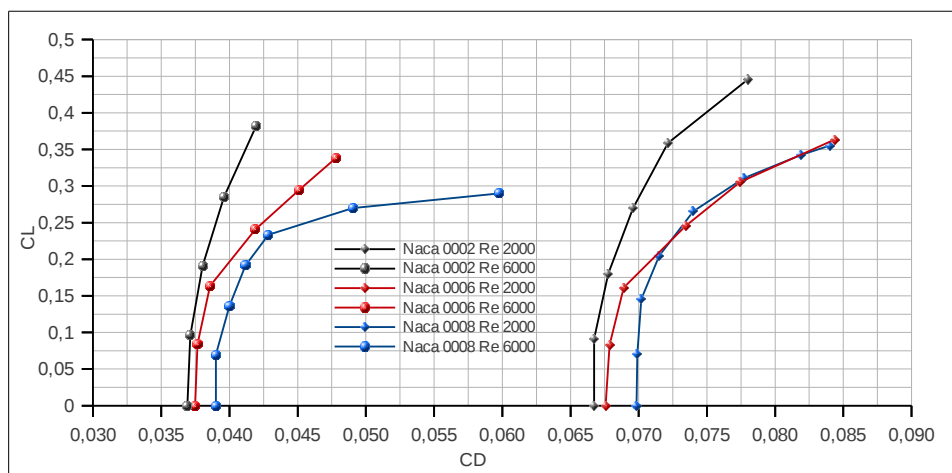


Figura 19: $C_L - C_D$. Perfiles NACA 0002, 0006 y 0008 a Reynolds 2000 y 6000.

En la bibliografía se encuentra que la pendiente de sustentación para un perfil simétrico en flujo no viscoso es de 2Π , y que al considerar luego viscosidad en flujos de alto números de Reynolds la pendiente decrece entre el 5 y 10 % respecto de este valor (Kunz, 2001).

En el rango cuasi-lineal se da una diferencia en la pendiente de sustentación aproximadamente de un 13% para NACA 0002, 33% para NACA 0006 y 54% para NACA 0008. Está claro que el efecto viscoso sobre la curva de sustentación es dominante, y va en aumento con el incremento de espesor. Este último efecto es debido a que al aumentar el ángulo de incidencia, las zonas de flujo muerto donde la presión no se recupera sobre el extradós, produce una suerte de “comba negativa” modificando la geometría efectiva en el ángulo de ataque del perfil (ver figura 20).

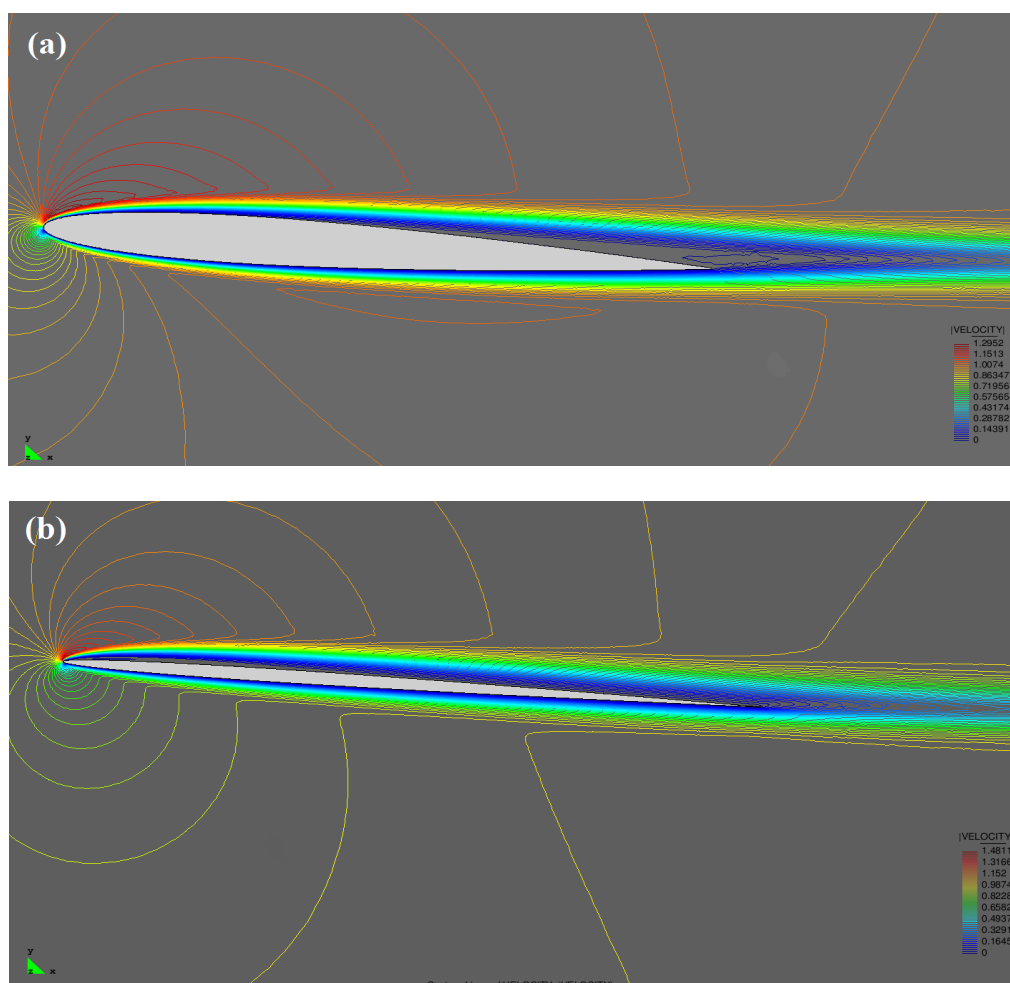


Figura 20: Flujo sobre perfiles: (a) perfil NACA 0008 a Reynolds 6000 y $\alpha = 4^\circ$. (b) perfil NACA 0002 a Reynolds 6000 y $\alpha = 4^\circ$.

Otro efecto manifestado al aumentar el espesor, es que se pierde rápidamente la zona lineal operativa del perfil debido al desprendimiento del flujo. Se da en el perfil NACA 0008 con respecto al 0002, que se prolonga un poco más (ver figura 21). Además, observamos como en el 0008 la pendiente de sustentación es mayor a menor Reynolds, contrariamente a lo que ocurre en el NACA 0002.

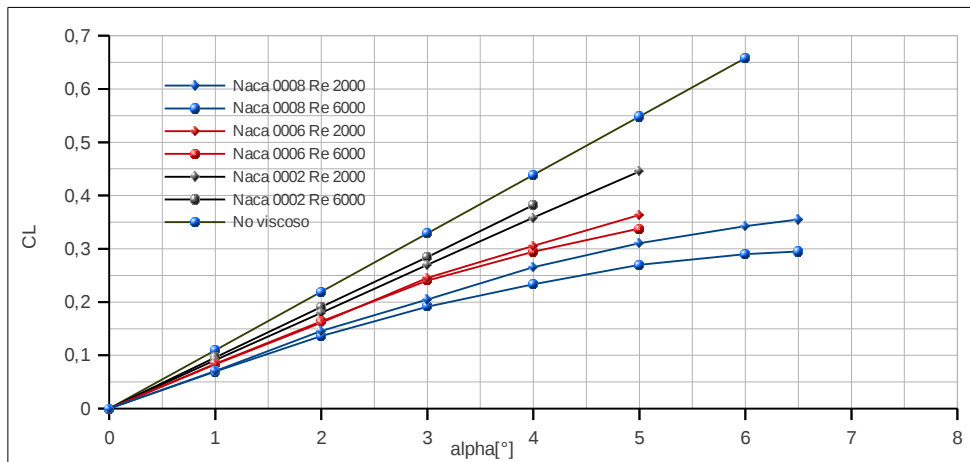


Figura 21: $C_L - \alpha$. Perfiles NACA 0002, 0006 y 0008 a Reynolds 2000 y 6000. Flujo no viscoso.

6.4. Influencia de la combadura

Los efectos de combadura no son diferentes a los estudiados a altos números de Reynolds, ya que producen un aumento de efectividad en la relación L/D. Básicamente compensa los efectos de “perdida” de combadura causados por el desprendimiento del flujo y los efectos viscosos.

alpha[°]	NACA 4402 Re2000	NACA 4402 Re6000	NACA 0002 Re2000	NACA 0002 Re6000	Pl. Plana Re2000
0	3,16	6,39	0,00	0,00	0,00
1	4,36	8,57	1,37	2,59	1,42
2	5,42	9,97	2,66	5,02	2,69
3	6,27	11,05	3,88	7,19	4,07
4	6,87	11,56	4,97	9,10	5,22
5	7,27	11,81	5,86	-	6,04
6	7,41	-	-	-	-
7	7,40	-	-	-	-

Tabla 2: Relación de sustentación vs. resistencia, en una placa plana y perfiles NACA 0002 y 4402.

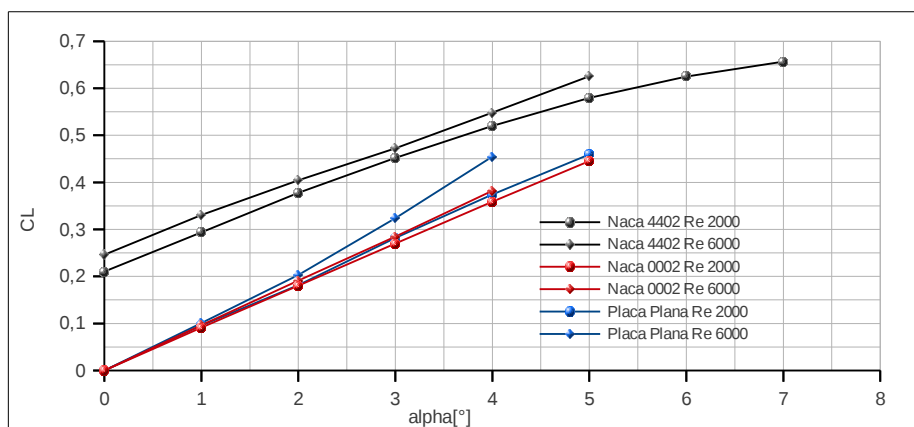


Figura 22: $C_L - \alpha$ para placa plana, y perfiles NACA 0002 y 4402 a Reynolds 2000 y 6000.

Realizamos una comparación entre una placa plana de espesor 2% con bordes redondeados, un perfil NACA 0002, y un perfil NACA 4402. En la curva de sustentación se observa un

incremento de sustentación para un mismo ángulo de ataque, la pendiente no acusa grandes cambios, además de que se mantiene medianamente similar con la variación del número Reynolds.

En el perfil NACA 4402 se retrasa la separación del flujo del borde de fuga con la disminución del número de Reynolds, pero se adelanta respecto al perfil NACA 0002 (ver figuras 22 y 23).

En cuanto a la resistencia, se obtienen mejoras en las prestaciones debido a la relación L/D para cada ángulo de ataque (ver Tabla 2).

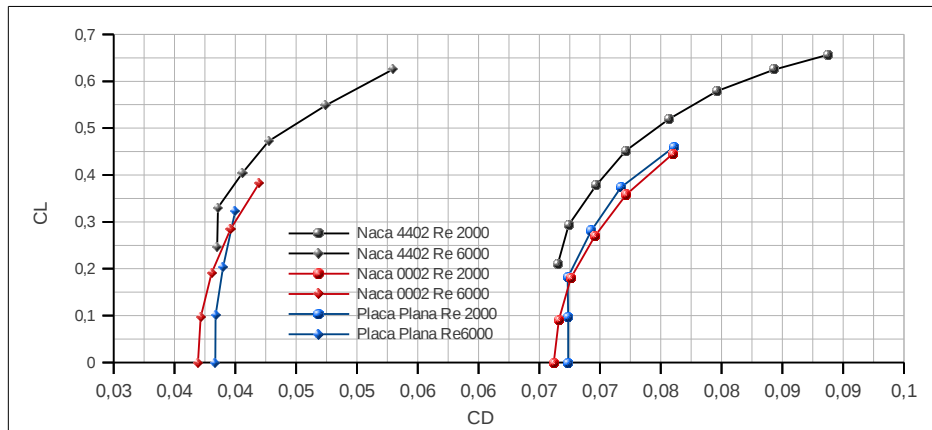


Figura 23: $C_L - C_D$ para placa plana, y perfiles NACA 0002 y 4402 a Reynolds 2000 y 6000.

	NACA 2302 Re 10000	NACA 4302 Re 10000	NACA 6302 Re 10000
alpha[°]	L/D Re10000	L/D Re10000	L/D Re10000
0	4,96	8,81	9,21
1	8,09	11,60	12,67
2	10,84	13,51	14,30
3	13,10	14,53	14,99
4	13,94	15,52	14,82
5	13,95	15,73	11,91

Tabla 3: Relación de sustentación vs. resistencia, en perfiles NACA 2302, 4302 y 6302.

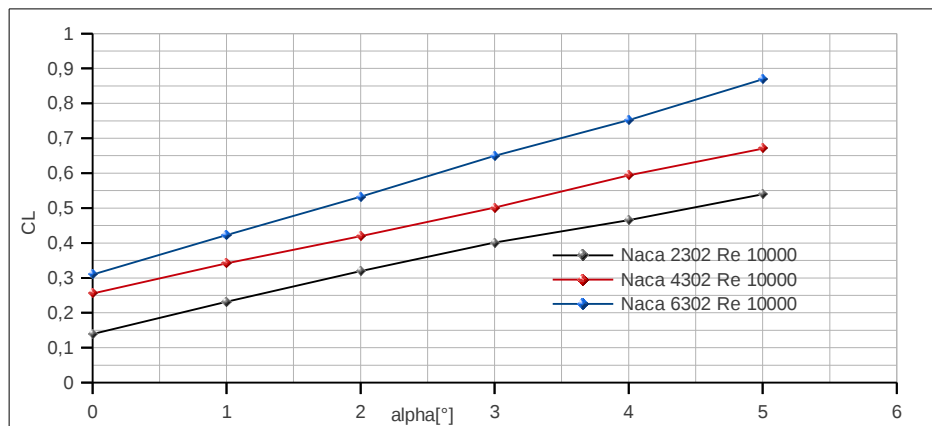


Figura 24: $C_L - \alpha$ para placa plana, y perfiles NACA 2302, 4302 y 6302 a Reynolds 10000.

Se simularon otros casos donde se comparan diferentes incrementos en la combadura,

manteniendo la posición de la misma y la relación de espesor constante. En base a esto, se utilizaron las geometrías de los perfiles NACA 2302, 4302 y 6302 a Reynolds 10.000. En dicho régimen, hay un aumento de C_L casi constante con el incremento de combadura para cada ángulo de ataque, y como es de esperarse, el desprendimiento del flujo comienza antes a mayor valor de combadura, obviamente acompañado de un aumento de resistencia (ver figuras 24 y 25). Las relaciones de eficiencia las observamos claramente en la (Tabla 3).

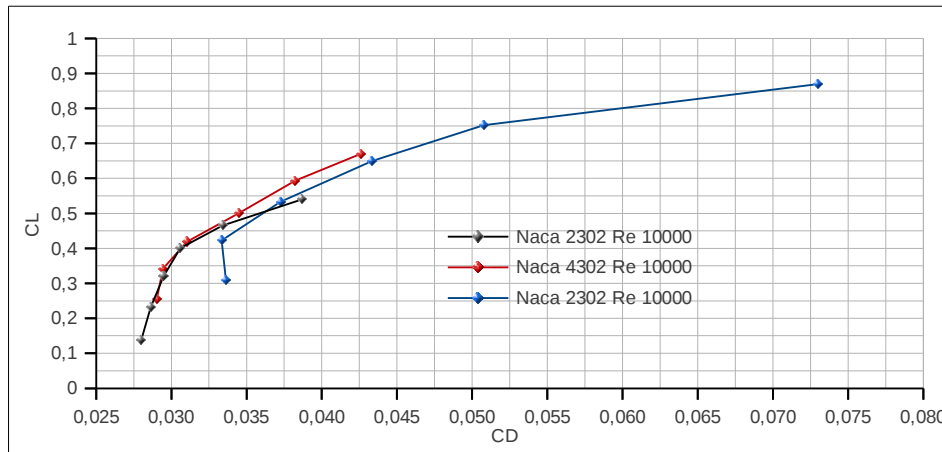


Figura 25: C_L-C_D para placa plana, y perfiles NACA 2302, 4302 y 6302 a Reynolds 10000.

	NACA 4302 Re 2000	NACA 4502 Re 2000	NACA 4302 Re 10000	NACA 4502 Re 10000
alpha[°]	L/D	L/D	L/D	L/D
0	3,27	3,04	8,81	8,17
1	4,59	4,27	11,60	10,69
2	5,60	5,31	13,51	12,79
3	6,44	6,17	14,53	14,16
4	7,29	6,80	15,52	15,07
5	7,42	7,33	14,55	15,71
6	7,82	7,35		
7	6,90	7,42		

Tabla 4: Relación de sustentación vs. resistencia, en perfiles NACA 4302 y 4502 a Reynolds 2000 y 10000.

Para concluir el estudio de la combadura, variamos la posición de la misma a lo largo de la cuerda y mantenemos su valor constante junto a la relación de espesor del perfil. Tomamos dos casos de perfiles delgados con una combadura de 4%, y su posición se varía desde el 30% a 50% (perfiles NACA 4302 y 4502) a Reynolds 2000 y 10000, (ver figuras 26 y 27). La diferencia no es tan notable como al variar el valor absoluto de combadura, pero lo que se puede apreciar es que en posiciones más atrasadas (NACA 4502), el desprendimiento comienza antes, pero a mayores ángulos de ataque mantiene mayor eficiencia (L/D) que posiciones más adelantadas (NACA 4302) (ver Tabla 4). Además, esto favorece a que el rango lineal, se extienda un poco más.

6.5. Consideraciones para la combinación y posterior elección de una geometría adecuada

En base a los datos obtenidos, podemos considerar algunas pautas sobre la elección de una geometría adecuada y con buenas prestaciones para la utilización en una aplicación bajo este flujo característico.

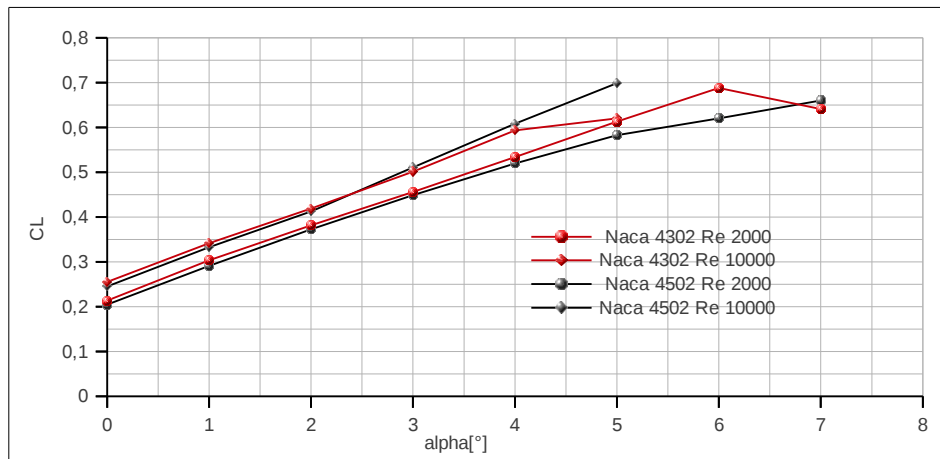


Figura 26: $C_L - \alpha$ y perfiles NACA 4302 y 4502 a Reynolds 2000 y 10000.

Los análisis realizados indican que al disminuir el número de Reynolds, la resistencia aumenta debido a que los efectos viscosos se tornan de gran relevancia, limitando la capacidad de recuperación de la presión, y por otro lado la pendiente de sustentación cae en gran medida. Si miramos las relaciones de espesor, notamos que las mejores prestaciones se dan en los

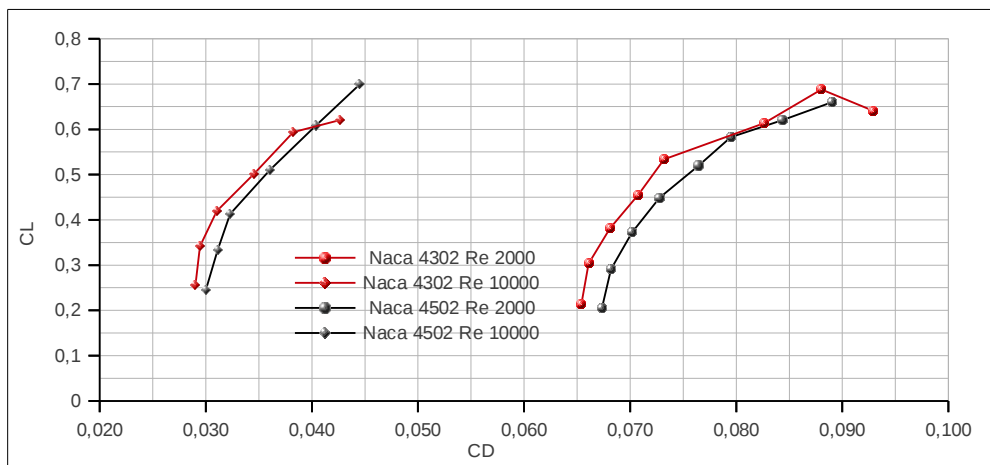


Figura 27: $C_L - C_D$ y perfiles NACA 4302 y 4502 a Reynolds 2000 y 10000.

perfiles delgados. Claramente se observa que la pendiente de sustentación es considerablemente mayor en este tipo de perfiles y con amplio rango de operabilidad, esto es mayor zona "lineal" de la curva $C_L - \alpha$ y como se mencionó, esto se debe a que el pico de succión de borde de ataque es notablemente reducido a estos números de Reynolds, resultando beneficioso en perfiles de poco espesor. Haciendo referencia a la resistencia, las curvas polares reflejan lo obtenido en la curvas de sustentación; perfiles delgados recuperan mejor la presión que perfiles gruesos, derivando obviamente en menor resistencia de presión.

El segundo factor y de mayor importancia a la hora de conseguir eficiencia, es la combadura. Es evidente que al agregarle valor, mejoran notablemente las características aerodinámicas de los perfiles, tanto en C_L como en la prolongación del rango de operabilidad lineal. Se tiene lógicamente, un aumento de resistencia debido al desprendimiento prematuro de flujo, pero en cuanto a la ganancia neta es totalmente satisfactorio. Otro punto

de interés a tener en cuenta es la posición de la combadura, en el cual se observa que ubicaciones adelantadas tienen mejor comportamiento a bajos ángulos de ataque, es decir el perfil puede ser utilizado en aplicaciones donde dichos ángulos permanezcan mínimos y cuasi-constantes. Las posiciones más atrasadas mejoran a las primeras sobre la extensión del rango lineal de la curva $C_L-\alpha$ y en la eficiencia L/D , de tal modo que pueden ser empleadas en aplicaciones con variabilidad de ángulo de ataque.

7. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este trabajo se ha llevado a cabo el estudio del flujo a números de Reynolds ultra-bajos, con el fin de aportar al desarrollo de la aerodinámica de micro vehículos aéreos en un marco numérico computacional con la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes, bajo régimen laminar en 2 dimensiones, mediante el método de elementos finitos con un algoritmo de integración de pasos fraccionados. El algoritmo de estabilización implementado es aproximación algebraica de subescalas (ASGS), y la discretización del dominio es en elementos triangulares lineales de tensión constante.

La verificación del código ha sido llevada a cabo por la evaluación de casos teóricos encontrados en la bibliografía como el cilindro y la placa plana. Los perfiles estudiados a Reynolds menores a 10000, también fueron verificados con resultados obtenidos por Kunz (2003) y Abdo (2005) con resultados satisfactorios.

El código fue utilizado para analizar efectos de variación del número de Reynolds, geometría del perfil, combadura, espesor, posiciones de desprendimiento, además de las performances aerodinámicas como las curvas C_L y C_D para diferentes condiciones de flujo, y remarcar la importancia de los efectos viscosos que se presentan.

El espesor de la zona viscosa que se extiende desde el cuerpo hacia el flujo, toma un papel fundamental en las características aerodinámicas de los perfiles al cambiar de manera relevante su geometría efectiva, existiendo además una gran variación del mismo a este régimen de Reynolds.

El efecto más obvio presente es el notable incremento de resistencia con la disminución del número de Reynolds a un mismo ángulo de ataque, es aquí la importancia de la eficiencia, debido a la potencia demandada en el caso del vuelo controlado de un micro vehículo aéreo.

Por otro lado, la pendiente de sustentación es menor con respecto a Reynolds altos, a causa de que el pico de succión de borde de ataque disminuye notablemente por los efectos viscosos, resultando en un impacto negativo en la relación L/D . La adición de combadura brinda una ganancia neta de eficiencia, se puede decir de sustentación a costas de incremento de resistencia con una implicancia del aumento de la resistencia debido al temprano desprendimiento.

Los desarrollos a futuro, tienen el objetivo de extender la investigación del flujo a ultra-bajo Reynolds a régimen inestacionario bajo la misma formulación numérica. Para ello se deberá implementar el movimiento de la malla junto a la constante actualización de las condiciones de contorno. El análisis tiene el propósito de estudiar las características aerodinámicas y el comportamiento del flujo en detalle, reproduciendo movimientos típicos de alas batientes.

La siguiente etapa es llevar lo estudiado a 3 dimensiones, es decir modelar alas de envergadura finita y llevar a cabo los análisis realizados en 2 dimensiones sobre las geometrías que han resultado ser las más efectivas. Se anexará además un análisis en flujo inestacionario con el propósito de comparar con los resultados obtenidos en 2 dimensiones.

REFERENCIAS

- Abdo, M., and Matescu, D., *Low- Reynolds number aerodynamics of Airfoil Incidence*. AIAA, Aerospace Science Meeting and Exhibit. (2005).
- Bell J., Collela P. and Glaz H., *A second order projection method for the Navier-Stokes equations*, J. Comput. Phys. 85, 257-283 (1989).
- Codina, R., *Pressure Stability in Fractional Step Element Methods for Incompressible Flows*. Journal of Computational Physics, 170:112-140, (2001).
- Codina, R., *Stabilization of incompressibility and convection trough orthogonal sub-scales infinite element methods*. Computational Methods for Applied Mechanics in Engineering, 190:1579-1599, (2000).
- Codina, R., y Badia S., *Métodos de predicción-corrección basados en esquemas de pasos fraccionados para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes*. Métodos Computacionais em Engenharia, (2004).
- Cook, R.D., Malkus David S., and Plesha Michael E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4ta Edición, (2001).
- Hughes, et. al., *Multiscale and Stabilized Methods*, *Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons©, (2004).
- Kunz, P., *Analysis and Design of Airfoils for Ultra-Low Reynolds Numbers Flight*. PhD thesis, Stanford University, Department of Aeron. and Astron., Stanford, CA, USA., June (2003).
- Kunz, P., and Kroo, I., *Analysis and design of airfoils for use at ultra-low reynolds numbers*. AIAA, Progress in Aeronautics and Astronautics. 195, Chap 3 (2001).
- Panton, R. L., *Incompressible Flow*, John Wiley (1984).
- Reddy, J. N., *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1993.
- Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, New York, 1969.
- Soto O., Lohner R., *An implicit monolithic time accurate finite element scheme for incompressible flow problems* , AIAA 2616-2631 (2001).
- Zienkiewicz, O.C., y Taylor, R.L., *The finite element method: The Basis (Vol I)*, Butterwoth-Heinemann, (2002).